Euclides

<36614661340019

<36614661340019

Bayer. Staatsbibliothek

Auct. Gr. Vet. 101. p. 538.

Ad Convent. Monac. O. E. S. A.
1730

HVICT LIVRES DES ELEMENTS DEVCLIDE

RENDVS PLVS FACILES

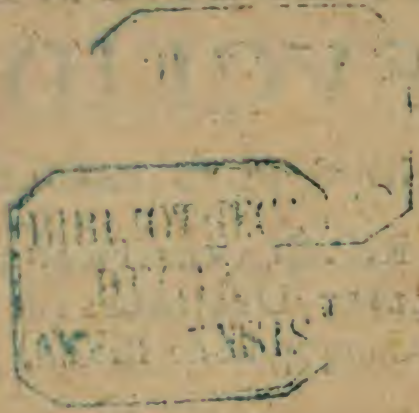
Par le R. P. CLAVDE FRANÇOIS MILLIET DECHALES, de la Compagnie de IESVS.

A LYON,

Chez BENOIST CORAL, rue Merciere, à la Victoire.

M. DC. LXXII.

Auec Priuilege du Roy.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

AV LECTEVR.

ENCORE que beaucoup de personnes, ayent tra-
adi[illegible]é fort heureusement
[illegible]om[illegible] elemens d'Euclide ; & qu'il semble inutile de retoucher cet ouurage ; ce n'est pas sans raison que ie me suis resolu de les traiter de nouueau & à ma façon. Il y a quelques années qu'estant obligé de les expliquer publiquement, i'y remarquay plusieurs choses capables de faire de la peine, à ceux, qui commencent, & de leur donner du degouust d'vne estude si profitable. Quelques Autheurs, ne voulant rien laisser en arriere, ont

fait des ramas de quantité de notes qui quoyque doctes retenant le lecteur trop longtemps en des difficultez espineuſes, ont couſtume d'abbatre le courage de pluſieurs. Quelques autres au contraire affectent vne trop grande briefueté, & ne faiſant qu'indiquer quantité de points tres neceſſaires, & ne les expliquant qu'à demy, embroüillent, outre cela qu'ils font que quelques propoſitions n'eſtoient pas bien demonſtrées, & que d'autres eſtoient trop difficiles pour eſtre miſes parmy les elementaires. C'eſt ce qui m'oblige maintenant que ie commence à Marſeille vne nouuelle claſſe de matematique eſtablie principalement pour la marine, à faire imprimer Euclide en François. Ie ne pretends pas en cet ouurage de rien dire de nouueau & qui ne ſoit commun, ie taſcheray cependant à faire

re que la methode, & la façon ne soient pas communes, & qu'elles aydent par leur clarté à le rendre intelligible. Ie me sers des demonstrations ordinaires, & ie les propose dans l'ordre commun, excepté quelques-vnes, que i'ay creu, ou trop difficiles, ou inutiles; & pour lors i'en substitue d'autres en leur place. I'ay adiousté dans le premier liure quelques demonstrations qui m'ont semblé manquer à Euclide, ce sont celles des Paralelles, i'ay demonstré le cinquiesme liure, d'vne façon plus intelligible, & qui explique plus clairement la nature de la proportion. Ie crois auoir rendu le douziesme plus facile; dans les autres i'ay changé ce que i'ay creu pouuoir faire de la peine à ceux qui commencent. I'ay adiousté aux six premiers liures l'onziesme, & vne partie du douziesme, & si i'ay laissé les

autres ; ce n'eſt que parce que l'experience m'a fait voir que ceux qui commencent y perdent le temps. La fin que ie me ſuis proposée en cet ouurage, n'eſt autre que de rendre ſi faciles, les elements de Geometrie, qu'vn eſprit mediocre peut les apprendre ſans l'ayde de perſonne, i'eſpere en ſon temps de mettre au iour vn ouurage plus conſiderable, & donnant au Public, vn cours entier de matematique, donner quelque ordre à toute cette ſcience. I'ay rencontré quantité de perſonnes, portées de beaucoup d'inclination aux matematiques, & qui apres auoir ſurmonté les difficultez de la Geometrie, ne ſçauoient qu'elle partie ils deuoient apprendre la premiere, ie ne ſçay comment il s'eſt pû faire que la matematique qui a pris ſon origine, de l'ordre & de lenchaineure des propoſitions, ſemble

ſemble manquer d'ordre en ſes parties principales, ie veux apporter du remede à cette perplexité & ie penſe que ie ne ſeray pas inutile au Public, ſi ie puis contribuer à la clarté de cette ſcience.

PRIVILEGE DV ROY.

NOVS PAVL SVFFREN Prouincial de la Compagnie de IESVS en la Prouince de Lyon, ſelon le Priuilege accordé à la dicte Compagnie par les Roys tres Chreſtiens Henry III. le 20. Mars 1583. Henry IV. le 20. Decembre 1608. Louys XIII. le 14. Fevrier 1610. & Louys XIV. à preſent regnant le 23. Decembre 1648. par lequel il eſt defendu à tous Libraires ſous les peines portées audit Priuilege, d'imprimer les liures compoſez par ceux de ladite

te Compagnie, ſans permiſſions des Superieurs. Permettons à BENOIST CORAL d'imprimer, & vendre ſeparément, pour dix ans vn liure intitulé *les Elemens d'Euclide*, compoſé par le P. CLAVDE FRANÇOIS DECHALES auec defences à tous autres de les imprimer, ſoubs les peines portées dans l'original. Fait à Lyon ce ſeptiéme Octobre 1671.

PAVL SVFFREN.

ERRATA.

PAge 11. ligne 11. ſe remue ſoubs la. *liſez* ſe remue ſur la. p.11.l.24. l'vne à l'autre *l.* l'vn à l'autre. p.13.l.6. à cette ſeconde *l.* cette ſeconde, p.13. l.13. des quantitez. *l.* les quantitez. p. 14.l.12. adiouſte *liſez* adiuſte. p.16.l.2. diſtinctes par tout, ou. *l.* diſtantes par tout or. p.18. l.11 au ſecond *l.* en ſecond p. 21. l. 1. dans ces. *liſez* de ces p.21. l. 14. AB, eſgales *l.* AB, puiſque elles ſont eſgales p.25. l. 11. de plus des coſtés. *l.* de plus les coſtez p.25. l.15. ABC, ACD. *l.* ABE, ACD. p.28.l.9. ABC, DEG, *l.* ABC DEF. p.32.l.7. BAG *l.* BAC. p.36. l.4. ſur la ligne AE. *l.* comme fait la ligne AE, p.38.l.22. au poinct e. *l.* au poinct c. p.41. l. 20. au triangle *liſ.* dans le triangle ADC. p.45.l.6. les coſtez BE BD, *l.* les coſtes BE, ED, p. 50. l.21. l'angle ABA *l.* l'angle A ſoit p.51.l.10. l'angle A *l.* l'angle AcB p. 51. l. 14. l'angle cAB *l.* le triangle cAB. p.58. l.27. les coſtez CD. *l.* les coſtez CE. p. 68. l.4. le coſté formé &c. *l.* le coſté AD. p.74. l.13. or entre *l.* & entre p. 75. l. 18. or entre

l. &

l. & entre p.101. l. 15. CGB, CBI. *l.* IGB, GBI, p.104. l.9.DB. soit *l.* DB son p.104. l.11. à la ligne AL. *l.* au rectangle AL. p.108.l.5.qui soit BL *l.* qui soit BE.p.115. l.10. joint à vn *l.* & soubs vn p. 116. l.16. le rectangle DH. *l.* le rectangle DG. p.122.l.1.soubs CF *l.*soubs CB. p.123.l.10. & qu'on l'entende *l.* & qu'on la produise p.137. l. 15. plus grande que AB. *l.* plus grande que AD. p.141. l. 12. se couppent *l.* se touchent p.141. l. 20. commune cB, *l.*commune cD p.146.l.23.& de DF *l.*& de CF. p. 147. l. 13. que ce peut *l.* que ce ne peut p. 148. l. 4. que GH soit *l.* que EH soit p.151. l.9. le P.Iaques *l.* le P.Taquet p.154.l.10. le coste B. *l.*l'angle B.est commun donques p.158. l. 18. l'angle EB. *l.*l'angle EBA p.160. l. 7. BED & BCD. *l.* BAD,& BCD, p.167. l. 11. angles EF, IC. *l.* les arcs EF, IC. p. 170. l.4. les arcs BB, *l.* les arcs AB & BC. p. 170. l.19. ce mesme *l.* de mesme p.172. l.15. l'angle E, *l.* l'angle F.p.173.l.27.E & F, *l.*E,& ABD p.175. l.16. KDC *l.* EDL p.179. l.21. GF. & EF. *l.* GF, & GE. p. 184. l.15. FG. *l.*FC. p.187. l.13.adiouster *l.* adiuster p.199.l.11.

dans

dans ſa baſe *l.* ſur ſa baſe p.222. l.19. à la quantité, que *l.* à la quantité CD. p. 222. l.20. FCD. *l.* F. p.261. l.17. or ſi E a *l.* que E aye vne p. 267. l.11. A & B *l.* A & C. p.279. l.18. ADE *l.* BDE, p.312. l.11. DE à DG. *l.* DF à DG, p. 312. l. 15. ainſi il y aura. *l.* ie dis qu'il y aura p.319. l.19. baſe BD. *l.* baſe BC, p.337. l.10. ABD. & CBD *l.* ABD & CDB, p.343. l.23. donques BD, DF, *l.* BE, DF, p.365. l.13. FG, GD *l.* FG, HD, p. 366. l.17. AK, BD, *lis.* AK, CD, p.371. l. 7. CE, comparée *l.* GF. comparée. p.412. l.18. le priſme A. *l.* le priſme B.

LIVRE

LIVRE PREMIER DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Le poinct eſt ce qui n'a aucune partie.

CETTE *definition ſe doit ainſi entendre ; la quantité s'appelle poinct, laquelle nous conceuons faiſant abſtraction de ſes parties, ſoit qu'elle en ayt en effet & ſoit diuiſible, ou qu'elle n'en ayt pas, & ne ſe puiſſe diuiſer : car les poincts Mathematiques, ne ſont pas les meſmes que les poincts Zenoniques ; dont la poſſibilité eſt reuoquée en*

doute par plusieurs : au contraire, personne ne peut douter des poincts Mathematiques, pourueu qu'on les entende comme il faut, c'est à dire comme ie l'ay dit.

2 La ligne est vne longueur sans largeur.

Il faut entendre cette definition, de mesme façon que la precedente, & l'on conçoit qu'vne ligne se produit, par le mouuement d'vn poinct.

3 Les extremités d'vne ligne sont les poincts.

4 Vne ligne droite, c'est celle dont les poincts sont rangez directement, c'est à dire, sans courbure & sans obliquité, ou bien c'est la plus courte ligne qu'on peut tirer d'vn poinct à vn autre ; ou certes, c'est celle en laquelle les extremitez peuuent faire ombre, aux autres parties.

5 La surface, ou superficie, est vne quantité, qui a longueur, & largeur sans profondeur.

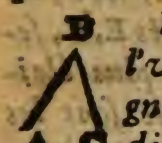
6 Les extremitez de la superficie, sont les lignes.

7 La surface plaine, est celle dont tou-

tes les lignes ſont rangées directement.

Ou bien c'eſt celle à laquelle ſe peut adiuſter vne ligne droite, de quelque biais qu'on la preſente, & en quelque ſens qu'on la conçoiue.

8 Angle plan, c'eſt l'inclination de deux lignes, qui ſe touchent, & ne ſont pas directement oppoſées.



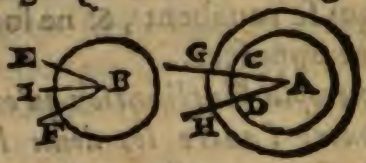
Par exemple, l'inclination qu'ont l'vne contre l'autre les deux lignes AB, BC; car elles ne ſont pas directement oppoſées, & ne ſe rencontrent pas, en ſorte qu'elles faſſent vne meſme ligne.

9 L'Angle rectiligne eſt l'inclination de deux lignes droites.

C'eſt de cét angle que nous parlons principalement; & parce que ceux qui commencent ſe trompent pour l'ordinaire, & meſurent la grandeur de l'angle, par celle des lignes, qui le compoſent; il ne ſera pas hors de propos de l'expliquer.

Vn Angle eſt eſtimé plus grand que l'autre, quãd l'ouuerture des lignes qui le cõpoſent, eſt plus grande; c'eſt à dire quand les lignes

s'écartent dauantage, dans la meſme diſtance de la pointe de l'angle. Comme l'angle A eſt plus petit que l'angle B, encore que les lignes du premier ſoient plus grandes, parce que ſi l'on prend dans chacun de ces angles, des poincts également éloignez des extremitez A, & B.



Par exemple C, D, E, F, les poincts E, F, ſeront plus éloignez l'vn de l'autre, que ne le ſont les poincts C & D. Que ſi l'on continuoit les lignes BE, BF, l'angle EF, demeureroit le meſme: parce que les poincts marquez de ces lettres auroient touſiours la meſme diſtance entre eux.

On peut encore dire que l'angle eſt le plus petit, qui a vne pointe plus aiguë, & que celuy qui l'a plus émouſſée eſt plus grand.

Nous nous ſeruons communement de trois lettres pour décrire vn angle en le nommant: la pointe de l'angle eſt ſignifiée par la lettre du milieu. Ainſi l'angle CAD, eſt celuy que font les lignes CA, & DA vnies au poinct A.

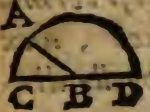
La mesure des angles, est le cercle ; de sorte que si nous voulons chercher l'étenduë de l'angle CAD, nous faisons vn cercle, & pour cela nous mettons le centre au poinct A, qui est la pointe de l'angle, & l'angle sera d'autant plus grand, que les lignes de l'angle enfermeront plus de parties du cercle : or il est indifferent que le cercle soit grand, ou petit : car si du mesme centre A l'on fait plusieurs cercles, l'arc GH renfermé entre les lignes de l'angle, contiendra autant de parties du grand cercle, que l'arc CD en contiendra du petit : les Mathematiciens se sont accordez à diuiser vn cercle en 360. parties égales, qu'ils appellent degrez, & pour cette raison nous disons qu'vn angle est de dix, de vingt, de trente degrez, quand l'arc compris entre ses lignes est de dix, de vingt, ou de trente degrez. L'angle donc sera plus grand, dont les lignes renfermeront vn arc de plus de degrez, & celuy-là sera plus petit, dont les lignes contiendront vn arc de moins de degrez. Comme l'angle EBF, est plus grand que l'angle GAH, parce que l'arc EF, contient plus

de parties de son cercle, que l'arc GH, du sien. La ligne IB, diuise l'angle EBF, en deux parties égales; si les arcs EI, IF sont égaux: de mesme l'angle EBI, est vne partie de l'angle EBF, parce que l'arc EI mesure de l'angle EBI, est vne partie de l'arc EF, mesure de l'angle EBF.

10 Quand vne ligne tombant sur l'autre fait des angles égaux, de côté & d'autre: les angles sont droits, & la ligne s'appelle perpendiculaire.

Comme si la ligne AB, tombant sur la ligne CD, fait les angles ABC, & ABD égaux, c'est à dire, si en décriuant du centre B, le demy cercle CAD les arcs AD, & AC sont égaux, les angles seront droits: & la ligne AB sera perpendiculaire, & parce que (comme ie montreray) l'arc CAD est vn demy-cercle, les arcs AC, AD seront chacun de 90. degrez, c'est à dire, la quatriéme partie de 360. degrez, d'où ie concluds que l'angle droit contient 90. degrez.

11 L'angle obtus est celuy qui est plus grand qu'vn angle droit.



Comme l'angle ABD est obtus, parce que l'arc AD contient plus de 90. degrez.

12 L'angle aigu est celuy qui est plus petit qu'vn angle droit.

Comme l'angle ABC est aigu, parce que l'arc AC, est de moins que de 90. degrez.

13 Terme, c'est l'extremité d'vne quantité.

14 La figure est terminée d'vn, où de plusieurs termes.

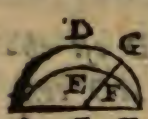
La figure doit estre fermée de tous costez.

15 Le cercle est vne figure terminée par le circuit d'vne ligne, qu'on nomme circonference, en sorte que toutes les lignes tirées à vn point, qui est au dedans, sont égales.

16 ce point s'appelle centre.

17 Le diametre du cercle, est vne ligne tirée par le centre, & terminée d'vn costé, & d'au-

tre à la circonference ; or cette ligne diuise le cercle en deux parties égales.



Comme la ligne AB, qui passe par le centre C, & qui est terminée en la circonference, aux poincts A, & B, s'appelle diametre.

Parce que quelqu'vn pourroit douter, si le diametre diuise le cercle également, c'est à dire en deux parties égales ; nous le pouuons facilement demõstrer en faisant voir que la partie ADB, est égale à la partie AEB : car si nous nous imaginons qu'en les pliant on les mette l'vne sur l'autre, ie dis que la circonference AEB tõbera iustement sur la circonference ADB : en effet, si elle ne tomboit dessus, il faudroit que l'vne fust enfermée dans l'autre comme AEB, dans ADB, or si l'on tiroit la ligne CFG, il s'ensuiuroit que la lig. CF, seroit égale à la lig. CG, puisque dans vn cercle toutes les lignes tirées du centre à la circonference sont égales ; ce qui ne pourroit estre la ligne CF, étãt vne partie de la ligne CG : ensuite, il faut aduouër que la partie AEB, repliée sur la partie ADB luy sera entierement égale.

18 Le demy-cercle eſt vne figure terminée par le diametre, & par la demy-circonference du cercle.

19 Les figures rectilignes ſont celles qui ſont terminées par des lignes droites; celles de trois coſtez ſont compriſes ſous trois lignes, les quadrilateres, ſous quatre, les multilateres ſous pluſieurs.

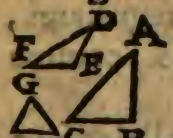
Euclide donne deux ſortes de diuiſion des triangles; vne par les coſtez, & l'autre par les angles.

20 Le triangle equilatere, eſt celuy qui a tous les coſtez égaux.

21 Le triangle iſoſcele, eſt celuy qui a deux coſtez égaux.

22 Le triangle ſcalene, eſt celuy qui a tous les coſtez inégaux.

23 Le triangle rectangle, eſt celuy qui a vn angle droit.



Comme le triangle ABC, duquel l'angle B, eſt droit.

24 Le triangle amblygone, ou obtuſangle, eſt celuy qui a vn angle obtus, comme DEF.

25 Le triangle oxygone, eſt celuy qui a tous les angles aigus, comme GIH.

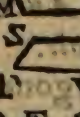
26 Le rectangle est vne figure à quatre costez, dont tous les angles sont droits.

27 Entre les figures à quatre côtez, le quarré est vne figure dont tous les côtez sont égaux, & tous les angles sont droits.

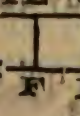
28 Le rectangle barlong, est vne figure qui a les angles droits, & les costez inégaux, comme DEFG.

29 Le Rombe, ou Losange, a les costez égaux, mais ses angles ne sont pas droits, comme HIKL.

30 Le Romboide est vne figure, qui a seulement égaux les costez, & les angles opposez, comme MNOP.



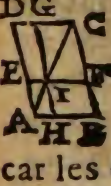
31 Les autres figures à quatre costez, qui sont irregulieres, s'appellent trapezes comme RSTV.



32 Les lignes paralleles sont des lignes droites, lesquelles estant tirées dans le mesme plan, & produites autant

qu'on voudra, ne s'approchent & ne s'éloignent point l'vne de l'autre; mais ſont toûjours equidiſtantes.

La diſtance de l'vne à l'autre ſe prend des perpendiculaires: comme ſi les lignes EF GH, ſont perpendiculaires, & égales, les lignes AB, CD ſeront paralleles: car par le mouuement d'vne ligne touſiours perpendiculaire, l'on fait deux lignes paralleles: de ſorte que ſi l'on conçoit que la ligne EF, ſe remuë ſous la ligne AB, en ſorte qu'elle luy ſoit touſiours perpendiculaire, le poinct E tracera la ligne CD, qui ſera enſuite par tout également diſtante de la ligne AB, nous auons adiouſté le mot d'equidiſtantes, à la definition d'Euclide, parce qu'il y a certaine eſpece de lignes, qui ne ſont pas droites, leſquelles s'approchent touſiours dauantage l'vne de l'autre, & cependant ne ſe rencontrent iamais.



33 Le parallelogramme eſt vne figure, qui a quatre coſtez, dont tous les oppoſez ſont paralleles l'vne à l'autre, comme ABCD: car les coſtez AB, CD ſont paralleles, de meſme que AD, BC.

34 Le diametre du parallelogramme, eſt vne ligne tirée d'vn angle à l'autre, comme AC.

35 Les complements, ſont des parallelogrammes, renfermez dans le grand, leſquels le diametre ne couppe pas; tels ſont les deux parallelogrammes HBFI, DEIG, qui ne ſont pas coupez par le diametre AC.

Les demandes que l'on doit accorder, ſont:

1 Que de quel poinct que ce ſoit l'on peut tirer vers vn autre vne ligne droite.

2 Qu'vne ligne droite, quoyque terminée & finie, ſe peut pourtant continuër, autant qu'on voudra.

3 Que de quelque centre que ce ſoit, & à quelque interualle que l'on voudra; on peut décrire vn cercle; ou pour le moins s'y en imaginer vn.

Les Axiomes ou Principes.

1 Les quantitez égales à vne troiſiéme, ſont égales entre elles. Et celle qui eſt plus grande où plus petite qu'vne autre, eſt auſſi plus grande que celle qui égale à cette ſeconde.

2 Si à deux quantitez égales, vous adiouſtez la meſme choſe, elles ſeront toûjours égales.

3 Si de chacune des deux quantitez égales, vous oſtez les meſmes quantitez, ce qui reſtera ſera égal.

4 Des quantitez inégales demeureront touſiours telles, ſi vous leur adiouſtez des quantitez égales.

5 Si des quantitez inégales vous retranchez des parties égales, celles qui reſteront ſeront inégales.

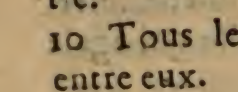
6 Les quantitez, qui ſont le double, le triple, ou la moitié d'vne autre quantité, ou des autres quantitez égales ſont auſſi égales entr'elles.

7 Ces quantitez ſont égales, qui eſtant miſes l'vne ſur l'autre, ne s'excedent point.

8 Si deux lignes ſont égales, & ſi deux angles ſont égaux, ils ne s'excederont point.

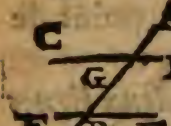
9 Le tout eſt plus grand, que ſa partie.

10 Tous les angles droits ſont égaux, entre eux.



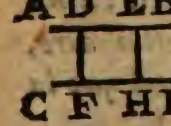
Cét exemple expliquera cette propoſition : les angles droits ABD, EFG, ſont égaux : car ſi nous nous repreſentons que l'on adiouſte tellement la ligne HG, ſur la ligne CD, que le poinct F, ſoit ſur le poinct B, ie dis que la ligne EF, tombera ſur la ligne AB ; & qu'elle ne tombera point à quartier ; comme fait la ligne IB, autrement les angles IBC, IBD, ſeroient égaux, entre eux (par la 10. defin.) or eſt-il que l'angle ABD, eſt plus grand, que l'angle IBD, qui n'eſt que ſa partie ; doncques l'angle ABD, ſeroit auſſi plus grand que l'angle IBC, ce qui eſt abſurde, puis qu'il eſt ſa partie. Donc la ligne EF tombera ſur la ligne AB, & par conſequent les angles EFG, ABD, eſtans mis l'vn ſur l'autre ne s'excedent point ; & par le 7. axiome ils ſont égaux.

L'axiome 11. d'Euclide : si vne ligne en couppe deux autres dans le mesme plan, & fait deux angles interieurs du mesme costé, plus petits que deux droits : ces deux lignes, estant produites concourront du costé, où se trouuent ces deux angles.



Comme si la ligne AB coupe les deux lignes CD, EF, & fait les deux angles internes, FBG, DGB du mesme costé, plus petits que deux droits, il estime qu'il est clair, que les lignes CD, EF, estant continüées concourront. Ie n'estime pas que cette verité soit si claire, qu'elle puisse passer pour axiome. C'est pourquoy au lieu de cét axiome nous en substituerons vn autre.

11 Si deux lignes sont paralleles, toutes les perpendiculaires, que l'on tirera entre elles seront égales.

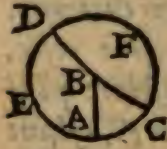


Comme si les lignes AB, CI sont paralleles, & que l'on tire deux perpendiculaires DF, EH, elles seront égales, entre elles, ce qui est renfermé dans la defini-

tion des paralleles, qui porte qu'elles soient également distinctes par tout où nous deuons mesurer ces distances par les perpendiculaires.

12 Deux lignes droites n'enferment aucun espace ; en sorte qu'il soit terminé de tous costez.

13 Deux lignes droites, n'ont point de segment commun.



C'est à dire, que deux lignes droites, ne se peuuent tellement rencõtrer, que de deux il ne s'en face qu'vne, comme si les lignes AB, CB, sont continüées, elles se couppe-ront ; mais elles n'aboutiront point ensemble au mesme poinct par la ligne ED: car si du poinct B, où elles se rencontrent, l'on fait vn cercle ADF, il s'ensuiuroit que la ligne ABD, diuiseroit le cercle en deux parties égales, & que AED seroit vn demy-cercle : la ligne CBD en feroit de mesme, & CED seroit vn demy-cercle ; ainsi AED, CED seroient égaux, c'est à dire, que le tout ne seroit pas plus grand que la partie.

Il est des propositions qui renferment

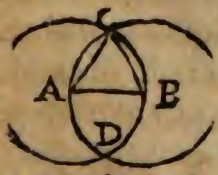
quelque chose, à faire, & on les appelle problemes: il en est d'autres qui ne contiennent qu'vne simple verité, & on les appelle theoremes.

Dans les citations, le premier nombre, signifie la proposition, & le second le liure, comme (par 4.2.) c'est à dire, par la quatriéme proposition du second liure, quand il n'y a qu'vn nombre, il signifie la proposition du liure lequel on explique.

PROPOSITION PREMIERE.

Probleme.

La façon de décrire vn triangle equilateral, sur vne ligne donnée.



Supposé que sur la ligne donnée AB d'vne longueur determinée, il faille faire vn triangle equilateral pour cela du poinct A comme centre alongeant le compas iusques à B, faites vn

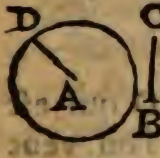
cercle DBC, faites en vn second du poinct B, comme centre alongeant le compas iusques au poinct A, ce second cercle CAD, coupera le premier au poinct C, cela fait tirez les lignes AC, BC, ie dis que le triangle ABC est equilateral.

Demonstration, premierement les lignes BA, AC, tirées du centre A, à la circonference du mesme cercle CBD, sont égales (*par la definition du cercle*) au second lieu les lignes BA, BC. tirées du centre B, à la circonference du mesme cercle CAD, sont aussi égales: enfin les lignes CA, CB, estant égales à la ligne AB, sont aussi égales entre elles, doncques le triangle ABC, a trois cô-tez égaux, ce que nous deuions demonstrer.

PROPOSITION II.

Probleme.

Le moyen de tirer par vn poinct donné, vne ligne égale à vne autre.



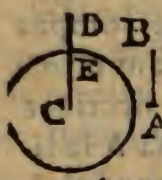
Si par le poinct A, il faut tirer vne ligne égale à la ligne BC, prenez auec le compas l'interualle BC, & sans changer cét interualle du point A, décriuez vn cercle, tirez ensuite du poinct A la ligne AD, de quelque costé qu'il vous plaira. Ie dis qu'il est clair qu'elle sera égale à la ligne BC.

Encore qu'ordinairement on apporte vne autre façon, qui semble plus scientifique, cependant dans la pratique, on se sert tousiours de celle-cy, & il me semble aussi facile prenant l'interualle BC, de décrire vn cercle du poinct A, que de le décrire du poinct B.

PROPOSITION III.

Probleme.

La façon de retrancher de la plus grande ligne vne partie égale à la plus petite ligne.



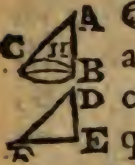
Si de la ligne CD qui est la plus grande, l'on veut retrancher vne ligne égale à la plus petite AB, prenez auec le compas l'interualle AB, & du poinct C, faisant le centre décriuez vn cercle, qui couppe la ligne CD, au poinct E. Il est clair que la ligne CE, est égale à la ligne AB.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Si deux triangles ont deux costez égaux, & que les angles compris

dans ces costez soient aussi égaux ; ils auront les bases égales, & les autres angles égaux, & les triangles seront égaux tout à fait.



SOit que les triangles ABC, DEF, ayent les costez AB, DE égaux; comme aussi les costez AC, DF; & que l'angle A, soit égal, à l'angle D, ie dis que les bases BC, EF sont égales ; que les angles E & B, comme aussi C & F sont égaux ; enfin que le triangle ABC, est égal au triangle DEF.

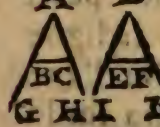
Demonstr. Imaginez-vous qu'on met la ligne DE, dessus la ligne AB égales, elles ne s'excederont poinct l'vne l'autre : en sorte que le poinct D tõbera sur le poinct A, & le point E, sur le point B. Cela estãt, la ligne DF, tombera sur la ligne AC, autrement l'angle D, seroit ou plus grand, ou plus petit que l'angle A. Or nous supposons qu'il luy soit égal : d'autre part, puisque la ligne DF est égale à la ligne AC, elles ne s'excederont point l'vne l'autre ; ainsi le poinct F tombera sur le

poinct C, donc puiſque le poinct E, eſt deſſus le poinct B, & F deſſus C, les baſes EF, BC tomberont l'vne ſur l'autre, ne ſe pouuant faire que EF, tombe ou deſſus ou deſſous, comme CHB; autrement contre le 12. Axiome, deux lignes droites fermeroient de tous les coſtez vn eſpace, doncques les baſes FE, & AB ſont égales, comme auſſi les angles B, & E, C & F; enſuite les triangles ne s'excedant point ſont égaux.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Dans les triangles iſoſceles les angles qui ſont ſur la baſe ſont égaux, & ayant produit les coſtez, les angles qui ſe forment ſous la baſe ſont égaux.



Que le triangle ABC ſoit iſoſcele, c'eſt à dire que le coſté AB ſoit égal au coſté AC. Ie dis que les angles

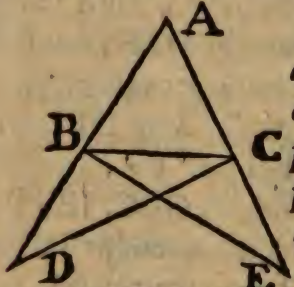
ABC, ACB ſont égaux ; & qu'ayant produit les côtez AB, AC iuſques aux poincts G & H, les angles GBC, HCB qui ſe forment ſous la baſe, ſont auſſi égaux. Repreſentez-vous vn autre triangle DEF qui ayt les coſtez DE, DF égaux aux coſtez AB, AC, en ſorte que les quatre lignes AB, AC, DE, DF ſoient égales entre elles : Suppoſons auſſi que les angles A & D ſont égaux.

Demonſtration : puiſque le coſté AB eſt égal au coſté DE, & AC à DF, & puiſque l'angle A eſt égal à l'angle D, les triangles ne s'excedent poinct l'vn l'autre. (*Par la 4. propoſition*) ainſi l'angle ABC, eſt égal à l'angle DEF, en ſorte que ſi l'on s'imagine que les triãgles ſont poſez l'vn ſur l'autre ; la ligne DEI tombera ſur la ligne ABG, & EF, ſur BC ; c'eſt pourquoy les angles GBC, IEF ſont égaux. Comparons maintenant les mémes triãgles d'vne façon tout-à-fait contraire ; en ſorte que le poinct F tombe deſſus B, & E deſſus C, puiſque la ligne DE eſt égale à la ligne AC ; & AB à DF, & que les angles A & D, ſont égaux, les

triangles appliquez l'vn sur l'autre de cette façon ne s'excederont pas (*par la* 4.) & l'angle ACB, sera égal à l'angle DEF ; comme aussi HCB , à l'angle IEF. doncques les angles ABC,ACB,que nous auons montré estre égaux à l'angle DEF, seront égaux entre eux ; comme aussi les angles GBC,HCB que nous auons montré estre égaux au mesme angle IEF.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition que les triangles equilateraux sont equiangles.



Quelques vns agréët dauãtage la demonst. ordinaire de la méme propos. que ie ne veux pas obmettre, encore que ie la trouue trop aiffile, & que pour cette raison i'aye subſtitué la precedente. On peut dõc si l'on veut, laisser la suiuãte.

Qu'on propose le triãgle ABC qui soit isoscele; c'est à dire, que les costez AB, AC soiẽt égaux; ie dis que les angles ABC, ACB qui

sont

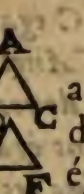
ſont ſur la baſe, ſont égaux, & ayãt produ-
les côtez AB, BC iuſques à E & à D, ie dis
que les angles CBD, BCE ſont égaux: coup-
pez les lignes égales BD, CE, en ſorte que
leur adiouſtant les coſtez AB, AC, qui
ſont ſuppoſez égaux, les lignes totales AD,
AE, ſoient égales, tirez auſſi les lignes
BE, CD.

Demonſtration. Les triangles ACD,
ABE, ont les coſtez AB, & AC égaux:
de plus des coſtez AD, & AE, l'Angle A
eſt commun aux deux triangles, doncques
(par la 4.) *les baſes BE, DC ſont égales,*
& les angles E & D. de meſme que les an-
gles ABC, ACD ſont égaux. Pareillement
les triangles DBC, ECB, ont les coſtez CE,
& DB, égaux; comme encore nous auons
montré que les coſtez BE, & DC ſont
égaux de meſme que les angles E & D,
donc (par la 4.) *les angles DBC, BCE*
qui ſont ſous la baſe ſont égaux: comme
auſſi les angles DCB, EBC: Enfin puiſque
nous auons montré que les angles ABE,
ACD eſtoient égaux, ſi vous en oſtez les
angles égaux EBC, BCD. Les angles ABC,
ACB qui reſteront ſeront égaux.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Si dans vn triangle deux angles ſont égaux : les coſtez qui leur ſont oppoſez, ſeront auſſi égaux.



Que dans le triangle ABC, les angles B, & C ſoient égaux. Ie dis que les coſtez AB, AC ſeront égaux: ſuppoſons vn autre triangle DEF, qui aye la baſe EF, égale à la baſe, BC, & que les 4. angles B, C, E, F ſoient égaux.

Demonſtration. Imaginez-vous que la baſe EF, eſt poſée ſur la baſe BC, puiſqu'elle luy eſt égale, l'vne n'excedera pas l'autre, & il faudra que la ligne ED tombe ſur la ligne BA, autrement l'angle E, ſeroit plus grand, ou plus petit que l'angle B: de meſme façon la ligne FD tombera ſur la ligne CA, & puiſque les lignes ED, FD tombent ſur les lignes

BA, CA, elles se rencontreront au poinct A ; c'est à dire, que le poinct D, tombera sur le poinct A ; & les lignes AB, DE, seront égales. Comparons maintenant les mesmes triangles d'vne façon contraire ; en sorte que le poinct E tombe en C ; & F en B ; puisque les bases sont égales & que les angles E & C, sont égaux, comme aussi F & B, les lignes FD, BA, ED, CA tomberont l'vne sur l'autre, & le poinct D se trouuera sur le poinct A, c'est pourquoy les lignes AC, DE, seront égales : ainsi les lignes AB, AC ayant esté prouuées égales à la mesme ligne DE, elles le seront entre elles.

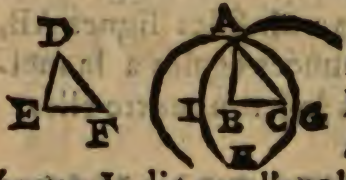
PROPOSITION VII.

Elle n'est que pour prouuer la huictiéme, que nous demonstrerons sans elle.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

Si vn triangle a chacun de ſes coſtez, égal aux coſtez d'vn autre triangle ; il aura auſſi chacun de ſes angles oppoſé, aux coſtez égaux, égal aux angles de l'autre.



Que les triangles ABC, DEG, ayent les côtez AB, DE; AC, DF; BC, EF égaux: Ie dis que l'angle A, eſt égal à l'angle D; comme auſſi l'angle B, à l'angle E, & l'angle C, à l'angle F. Faites du point B voſtre centre, & iuſques au poinct A, décriuez le cercle AGH, de meſme du point C, iuſques au meſme poinct A, décriuez le cercle IA.

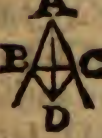
Demonſtration. Imaginez-vous que la ligne EF eſt poſée ſur la ligne BC, étant ſuppoſées égales, l'vne n'excedera pas

l'autre ; enſuite ie dis que le poinct D tombera ſur le poinct A : car il ne peut tomber que ſur la circonference du cercle AGH, autrement les lignes AB, DE ne ſeront pas égales ; il doit auſſi tomber ſur la circonference du cercle AI, autrement les lignes CA, FD ne ſeroient pas égales ; D tombera doncques au poinct A ; les triangles ne s'excederont point l'vn l'autre. Et enſuite les angles A & D ; E & B ; F & C, oppoſez aux cõtez égaux, ſont auſſi égaux.

PROPOSITION IX.

Probleme.

La façon de diuiſer en deux parties égales vn angle Rectiligne.



Soit propoſé l'angle rectiligne BAC, que nous deuons diuiſer par le milieu. Couppez deux lignes égales AB, AC, puis tirez la ligne BC, ſur laquelle vous formerez vn triãgle equilateral BDC (*par la* 1.) tirez la

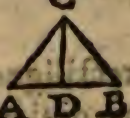
ligne AD : je dis que les angles BAD, CAD sont égaux.

Demonstration. Les triangles ABD, ACD, ont les costez égaux ; AD est commun aux deux triangles ; AB & AC sont gaux ; BD est aussi égal, à DC, puisque le triangle BDC est equilateral ; donques (*par la* 8.) les angles BAD, CAD sont égaux.

PROPOSITION X.

Probleme.

La maniere de diuiser par le milieu vne ligne donnée.



Soit la ligne AB, qui doit estre diuisée par le milieu. Faites le triangle equilateral ABC, (*par la* 1.) diuisez l'angle ACB par le milieu ; (*par la precedente*) tirant la ligne CD. Ie dis que les lignes AD, DB sont égales.

Demonstration. Dans les triangles

ACD, BCD, les costez AC, BC, sont égaux; puisque le triangle ACB est equilateral, le costé CD est commun aux deux triangles, l'angle ACD a esté fait égal à l'angle BCD; l'angle C ayant esté diuisé par le milieu, doncques (*par la* 4.) les bases AD, DB sont égales.

PROPOSITION XI.

Probleme.

Comment d'vn poinct donné, dans vne ligne, l'on peut tirer vne perpendiculaire.

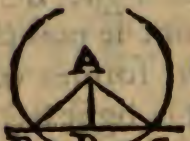
Si du poinct A, de la ligne BC, il faut tirer vne perpendiculaire à la mesme ligne BC. Faites vne ligne dont le poinct A soit le milieu, BAC: ensuite formez vn triangle equilateral BDC sur la ligne BC: (*par la* 4.) tirez ensuite la ligne AD; ie dis qu'elle est perpendiculaire à la ligne BC.

Demonſtration. Les triangles BAD, CAD, ont tous les coſtez égaux, car le côté AD eſt commun, aux deux triangles; les coſtez BD, DC, ſont auſſi égaux, puiſque le triangle BDC eſt equilateral, les deux parties de la ligne BAG ſont égales, donc (*par la* 8.) les angles BAD, CAD ſont égaux, c'eſt à dire (*ſelon la definition* 10. (que la ligne AD eſt perpendiculaire.

PROPOSITION XII.

Probleme.

Comment d'vn poinct donné hors d'vne ligne, l'on doit tirer vne perpendiculaire à la meſme ligne.



Soit donné le poinct A d'où il faille tirer vne perpendiculaire à la ligne BC: que ie veux eſtre infinie; c'eſt à dire que ie puiſſe eſtendre autant qu'il ſera neceſſaire. Décriuez du poinct A vn

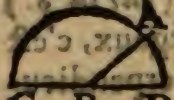
cercle, qui couppe la ligne BC, en deux poincts B & C. Diuisez par le milieu en D, la ligne BC, tirez la ligne AC. Ie dis que la ligne AD est perpendiculaire à BC.

Demonst. Dans les triangles ABD, ADC; tous les costez sont égaux; car le costé AD est commun aux deux triangles; les costez AB, AC sont égaux: car ce sont deux lignes tirées du mesme centre A, vers la circonference du mesme cercle: les costez BD & DC sont aussi égaux, la ligne BC ayant esté diuisée par le milieu, au poinct D, doncques (*par la 8.*) les angles ADB, ADC sont égaux, c'est à dire que la ligne AD est perpendiculaire.

PROPOSITION XIII.

Theoreme.

Quand vne ligne tombe sur l'autre, ou elle fait deux angles droits, ou deux angles lesquels mis ensemble sons égaux à deux droits.



Suppoſons Que la ligne AB, tombe ſur la ligne CD, je dis que les angles ABD, ABC ſont droits, où s'ils ne le ſont pas, ie dis que pris enſemble ils valent deux droits: pour le connoiſtre, auant tout, du poinct B décriuez le demi-cercle CAD dont enſuite B ſera le centre.

Demonſtrarion. Si les Angles ABC, ABD, ſont égaux, ils ſeront droits, (*par la* 10. *definition.*) s'ils ſont inégaux, il eſt certain que les arcs AC, AD, pris enſemble font le demi-cercle CAD; or les arcs de deux angles droits ſont deux quarts

de cercle, c'eſt à dire, ſont vn demicercle, doncques les arcs AC, AD, pris enſemble, ſont égaux aux arcs de deux droits, ce qui s'appelle eſtre égaux à deux angles droits; car l'on meſure les angles par les arcs, ainſi qu'enſeigne la definition 9.

PROPOSITION XIV.

Theoreme.

Si deux lignes s'vniſſent au meſme poinct d'vne troiſiéme ligne, & font auec elle deux angles eſgaux à deux droits; elles ne ſont qu'vne meſme ligne.

Que les lignes CA, AD ſe recontrent au poinct A, de la ligne AB; & faſſent les angles CAB, BAD égaux à deux droits: Ie dis que les lignes CA, AD ſont vne meſme ligne; c'eſt à dire que ſi on

étend la ligne CA, elle couurira la ligne AD; car si cela n'arriuoit pas, elle passeroit ou par dessus ou par dessous la ligne AD, sur la ligne AE, pour le prouuer auant tout, faites du poinct A le centre d'où vous décrirez le cercle CBD.

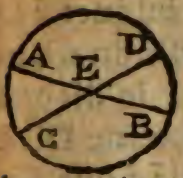
Demonstration. Puisqu'on suppose que les angles BAC, BAD sont égaux à deux droits; les arcs CB, BD doiuent estre égaux à deux quarts de cercle; c'est à dire à vn demi-cercle; d'ailleurs si la ligne CAE estoit vne ligne droite comme il le faudroit, c'est à dire vne mesme ligne: l'arc CBE seroit vn demi-cercle, ainsi les circonferences CBE, CBD, seroient égales, ce qui est absurde, l'vne estant partie de l'autre: il ne se peut donc faire que la ligne CA continüée, passe ailleurs que sur la ligne AD.

PROPO

PROPOSITION XV.

Theoreme.

Si deux lignes ſe couppent, les angles oppoſez ſeront eſgaux,



Si les deux lignes droites AB, CD ſe couppent au point E, ie dis que les angles oppoſez AED, CEB, de meſme que les angles AEC, DEB ſont égaux. Pour conceuoir la demonſtration, décriuez vn cercle dont le poinct E ſoit le centre.

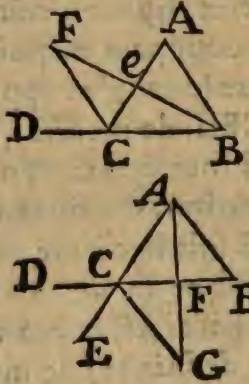
Demonſtration. Puiſque la ligne AB paſſe par le centre E, l'arc ADB ſera vn demi-cercle (*par la* 17. *definition*) de méme puiſque la ligne DC paſſe par le meſme centre E; l'arc DBC ſera auſſi vn demi-cercle; qui enſuite ne peut qu'eſtre égal à l'arc ADB, oſtez ce qu'ils ont de commun, qui eſt l'arc BD, les arcs AD, BC qui reſteront ſeront égaux, & (*par la definition* 9.) les angles AED, BEC

ſeront égaux, ainſi montrons-nous que les angles DEB, AEC ſont égaux.

PROPOSITION XVI.

Theoreme.

Si on produit le coſté d'vn triangle, l'angle externe ſera plus grand que l'angle interne opposé.



Eſtendez iuſques à D le coſté BC du triangle ABC, ie dis que l'angle externe DCA eſt plus grãd que l'ãgle interne oppoſé ABC, ou CAB, & premierement ie montre qu'il eſt plus grãd que l'angle ABC, diuiſez le coſté AC par le milieu au poinct e, & tirez la ligne BeF, en ſorte que la ligne Fe, ſoit égale á la ligne Be, tirez auſſi vne ligne depuis F iuſques au poinct e.

Demonſtration dans les triangles BeA, CeF, les deux coſtez Ce, eA; Fe, eB,

ſont égaux, & les angles oppoſez AeB, FeC ſont auſſi égaux, (*par la precedente,*) doncques (*par la* 4.) les angles A, & eCF, oppoſez aux coſtez égaux Fe, eB ſeront égaux: or il eſt certain que l'angle DCA, eſt plus grand que l'angle FCe, ainſi l'angle externe DCA, eſt plus grand que l'angle A.

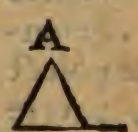
Pour prouuer que le meſme angle DCA eſt plus grand que l'angle B, faites encore le meſme triangle ABC, & étendez auſſi le coſté AC, iuſques au poinct E. Diuiſez en ſuite le coſté CB, par le milieu au poinct F: tirez la ligne AFG, en ſorte que les lignes AF, FG ſoient égales, enfin tirez la ligne CG.

Demonſtration. Dans les triangles AFB, CFG, non ſeulement les coſtez CF, FB, AF, FG, ſont égaux: mais encore les angles oppoſez AFB, CFG, (*par la* 15.) donc (*par la* 4.) les angles B, & FCG, qui ſont oppoſez aux coſtez égaux AF, FG, ſeront auſſi égaux: or il eſt ſans doute que l'angle ECF, eſt plus grand, que l'angle FCG, (*ainſi par la* 15.) l'angle ECF, & ſon oppoſé ACD, qui luy eſt égal ſera plus grand que l'angle B.

PROPOSITION XVII.

Theoreme.

Les deux angles d'vn triangle, pris enſemble, ſont moindres que deux droits.



Faites le triangle ABC, ie dis que deux de ſes angles A, & ACB ſont moindres que deux droits. Pour le connoiſtre, étendez le coſté BC iuſques à D.

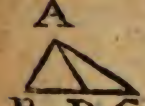
Dem. L'angle A interne eſt moindre que l'angle externe ACD (*par la* 15.) adioûtez à ces deux angles, l'angle ACB, les deux angles A, & ACB ſeront plus petits que les deux angles ACD, ACB, leſquels eſtant égaux à deux droits (*par la* 13.) les angles A, & ABC ſont plus petits que deux droits.

Vous proueriez de meſme façon, en étendant la ligne BC d'vn autre coſté que les angles A & B ſont moindres que deux droits.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

En toute sorte de triangle, le plus grand costé est opposé au plus grand angle.



Le triangle ABC, a le costé BC, plus grand que le costé AB; ie dis que l'angle BAC opppoſé au costé BC, est plus grand, que l'angle C opposé au costé AB : couppez la ligne BC tellement que la partie depuis B iusques au poinct ou vous la coupperez soit égale à la lig. BA, puis du poinct A, tirez vne ligne iusques à D qui est le poinct de la section.

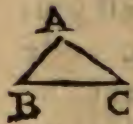
Demonstration. Puisque dans le triangle ABD, les costez AB, BD sont égaux les angles BAD, BDA sont égaux (*par la* 5.) or il est certain que l'angle externe ADB, ou égal au triangle ADC, est plus grand que l'interne C, donc l'angle

BAD eſt plus grand que l'angle C, à plus forte raiſon l'angle BAC ſera plus grand que l'angle C.

PROPOSITION XIX.

Theoreme.

En toute ſorte de triangle le plus grand angle eſt oppoſé au plus grand coſté.



Au triangle ABC, l'angle A, eſt plus grand, que l'angle C : or ie dis que le coſté BC, oppoſé à l'angle A, eſt plus grand que le coſté AB, oppoſé à l'angle C.

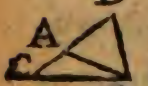
Demonſtration. Si le coſté BC n'eſt pas plus grand, que le coſté AB: il luy eſt ou égal ou plus petit : s'il luy eſt égal, les coſtez AB, BC eſtant eſgaux, le triangle eſt iſoſcele, & (*par la 5.*) les angles A, & C ſeroient eſgaux, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Que ſi le coſté BC eſt plus petit, que le coſté AB ; (*par la 18.*) l'an-

gle C ſera plus grand que l'angle A : ce qui eſt auſſi contre la ſuppoſition. Donc que le coſté AB n'eſt pas plus grand que le coſté BC, il ne luy eſt pas non plus égal, en ſuite il eſt plus petit.

PROPOSITION XX.

Theoreme.

De toute ſorte de triangle, deux coſtez mis enſemble, ſont plus grands, que le troiſieſme.



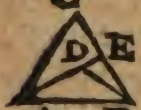
Au triangle ABC, les deux coſtez AC, AD pris enſemble, ſont plus grands, que le coſté BC. Produiſez le coſté CA, iuſques à ce que la ligne AD, ſoit égale à la ligne AB, & tirez la ligne DB.

Demonſtration. Puiſque dans le triangle ABD, les coſtez AD, AB ſont égaux, (*par la* 5.) les angles ADB, ABD ſont eſgaux : or eſt-il que l'angle CBD eſt plus grand que l'angle ABD, donc l'an-

gle CBD, ſera plus grand que l'angle CDB, & (*par la* 19.) le coſté CD, qui eſt eſgal à CA, & AB; eſt plus grand que le coſté CB, donc les coſtez CA, AB ſont plus grands que le coſté CB.

PROPOSITION XXI.

Si l'on forme vn triangle dans vn autre, & qu'on luy donne la meſme baſe; ſes coſtez ſeront plus petits que ceux du triangle exterieur, & ils contiendront vn plus grand angle.



Que ſur la ligne AB, baſe du triangle ABC, l'on forme le triangle ADB, renfermé dans le triangle ABC, Ie dis, que les coſtez AD, DB; ſont plus petits que les coſtez AC, CB, & que pourtant l'angle ADB, eſt plus grand que l'angle ACB: pour le conceuoir, alongez le cô-té AD, iuſques au poinct E.

Demonſtration. Les coſtez AC, CE,

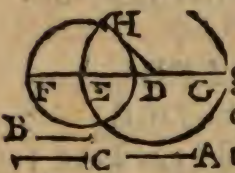
pris enſemble, ſont plus grands, que le coſté AE: (*par la* 20.) adjoûtez de coſté & d'autre, la ligne EB, les coſtez AC, CB, ſeront plus grands que AE EB : tout de meſme, puis que les coſtez BE, BD, ſont plus grands que BD, adiouſtez AD, les lignes AE, EB, ſont plus grandes, que AD, DB, à plus forte raiſon les coſtez AC, CB, ſont plus grands que AD, DB, ce que nous deuions premierement demonſtrer.

Secondement l'angle ADB exterieur eu eſgard au triangle DEB, eſt plus grand que l'angle DEB (*par la* 16.) & l'angle DEB (*par la meſme*) plus grand que l'angle ACB. Donc l'angle ADB eſt plus grand que l'angle ACB.

PROPOSITION XXII.

Probleme.

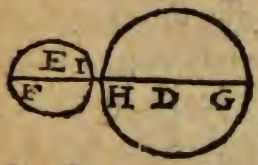
La façon de former vn triangle de trois lignes, dont les deux soient plus grandes que la troisiéme.



Qu'on propose les lignes A,B,C, desquelles on doit former vn triangle tirez la ligne ED esgale à la ligne A : puis la ligne EF, esgale à ligne B ; enfin la ligne DG égale à la ligne C: décriuez vn cercle du centre D,iusques à G,& vn autre du centre E, usques à F, qui couppe le premier cercle au poinct H: tirez les lignes EH,DH ; ie dis que le triangle EHD,est celuy qu'on a proposé.

Demonstration. La ligne ED est égale à la ligne A ; DH l'est à DG ; qui estoit esgale à C ; donc DH est esgale à C : de plus (*par la definition du cercle*) le cõté EH estant esgal à EF, est aussi esgal

à B, doncques le triangle EHD, a ses trois costez esgaux aux lignes ABC.



S'il arriuoit que les cercles ne se coupassent pas; ie monstrerois que la ligne DE, c'est à dire, A, est plus grãde que les deux lignes DG, EF, prises ensemble; c'est à dire que B & C, ce qui seroit contre la supposition; car la ligne DE, contient la ligne DH, esgale à DG, & la ligne EI, esgale à EF, & par dessus celles-là, la ligne HI.

PROPOSITION XXIII.

Probleme.

Comment l'on peut former en vn poinct assigné en vne ligne, vn angle esgal à vn autre.

Representez-vous le poinct A, de la ligne AB, & qu'il faille former vn angle esgal, à l'angle C: tirez la ligne DE,

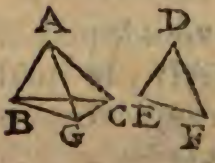
faites que la ligne AB ſoit eſgale à la ligne CE; & AG à CD, & BF, à DE: puis faiſant les centres des poincts A & B, formez (*par la* 22.) vn triangle ABH des lignes AB, AG. BF: je dis que l'angle BAH, eſt eſgal à l'angle C.

Demonſtration. Les triangles BAH, DCE, ont tous les coſtez eſgaux; c'eſt à dire AB, à CE; AH, à DC, HB, à DE; donc les angles A, & C ſont égaux (*par la* 7.)

PROPOSITION XXIV.

Theoreme.

Si vn triangle qui a deux coſtez égaux, aux deux coſtez d'vn autre triangle; a l'angle oppoſé à ſa baſe, plus grand que l'autre triangle ne l'a; il aura auſſi vne baſe plus grande.



Le triangle ABC, a le coſté AB eſgal au coſté DE, du triangle DEF; & & le coſté AC eſgal à DF: ſi

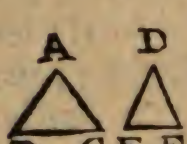
ſi pourtant l'angle BAC eſt plus grand, que l'angle D. Ie dis que la baſe BC, eſt plus grande, que le baſe EF : pour le demonſtrer, faites (*par la* 23.) l'angle BAG eſgal à l'angle D : tellement que le côté AG ſoit eſgal au coſté DF : puis tirez les lignes BG, GC.

Demonſtration en ces deux triangles ABG, DEF, les coſtez AB, DE ; AG, DF ; ſont eſgaux de meſme que les angles BAG, EDF, donc (*par la* 4.) les baſes BG, EF, ſont eſgales. D'autre part, puiſque les lignes AG, AC ſont égales, à la meſme EF ; elles ſont eſgales entre elles, & le triangle ACG eſt iſoſcele : doncques (*par la* 5.) les angles ACG, AGC ſont eſgaux ; or eſt-il que l'angle ACG eſt plus petit que l'angle BGC : doncques l'angle ACG, ſera auſſi plus petit, que l'angle BGC ; & à plus forte raiſon l'angle BCG, ſera plus petit que l'angle BGC. C'eſt pourquoy le triangle BGC, ayant l'angle BGC plus grand, que ne l'eſt l'angle BCG, le coſté BC qui luy eſt oppoſé, ſera plus grand (*par la* 19.) que le coſté BG, ou EF.

PROPOSITION XXV.

Theoreme.

Si vn triangle a deux costez esgaux, aux deux côtez d'vn autre triangle est la base plus grande ; il aura plus grand l'angle opposé à la base.



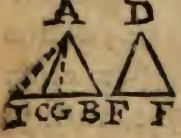
Representez-vous le triangle ABC, il a le costé AB: esgal au costé DE, & AC, esgal à DF; mais sa base BC, est plus grande que la base de l'autre, marquée de EF ; je dis que l'angle A, est plus grand, que l'angle D.

Demonstration. L'angle A ne peut estre esgal, à l'angle D, autrement (*par la* 4.) les bases BC, EF seroient esgales; il ne peut aussi estre plus petit, autrement la base BC, seroit plus petite que la base EF, (*par la* 24) ce qui seroit aussi contre la supposition : il reste doncque l'angle ABA plus grand que l'angle D.

PROPOSITION XXVI.

Theoreme.

Si deux triangles, qui ont deux angles esgaux, ont encore chacun vn costé esgal, ils seront esgaux.



Supposons que l'angle B du triangle ABC, soit esgal à l'angle E, du triangle DEF, & l'an A, à l'angle F ; & que enfin le costé BC, qui est entre ces deux angles, soit esgal au costé EF : je dis que les autres costez des triangles sont égaux entr'eux, & que l'angle CAB est entierement esgal à l'angle DFE.

Demonstration. Imaginez-vous qu'on met la base FE dessus la base BC ; puisque celle-là est esgale à celle-cy, elles ne s'excederont pas l'vne l'autre : alors la ligne ED tombera sur le costé AB, autrement l'angle E, seroit ou plus grand, ou plus petit que l'angle B, contre la sup-

position. I'en dis autant de la ligne ED, qui tombera sur CA : en sorte que les triangles ne s'excederont point l'vn l'autre.

Supposons maintenant que les angles demeurant les mesmes, le costé AB soit esgal, au costé DE ; je dis encore que les deux triangles seront esgaux en tout sens.

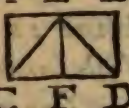
Demonstration. Imaginez-vous encore que l'on met la ligne DE, dessus AB, puis qu'on les suppose esgales, elles ne s'excederont pas l'vne l'autre, aussi la ligne EF tombera-t'elle sur BC : de telle façon que le poinct F sera iustement sur le poinct C : car s'il tomboit à costé comme au poinct G;& que pourtant l'on pretendit toûjours que le triangle ABG, fust esgal au triangle DEF, l'angle externe AGB eu esgard au triangle AGC, c'est à dire DFE seroit plus grand que l'interne ACG, (*par la* 16.) ce qui est contre la supposition : le poinct F ne peut aussi tomber au delà du poinct C, comme en I, parce que l'angle ACB (*par la* 16.) seroit plus grand que l'angle I, c'est

à dire que l'angle F ; donc le poinct F tombe iuſtement ſur le poinct C, & les deux triangles ne s'excedent point l'vn l'autre.

Parce que Euclide a demonſtré la propoſition ſuiuante par l'Axiome onziéme-me, que nous ne voulons pas admettre au nombre des axiomes, nous la demonſtrerons d'autre façon, ce qui eſt cauſe que ie mets les deux lemmes ſuiuants, ie donne ce nom à ces propoſitions, quoy qu'elles ne ſoient pas tirées de quelqu'autre matiere: ce qui ſeroit vne faute contre le deſſein que i'ay de ne donner que des elemens ; mais pour ne pas changer les nombres des propoſitions d'Euclide.

Lemme premier.

La ligne qui eſt perpendiculaire à vne des paralleles, eſt auſſi perpendiculaire à l'autre.



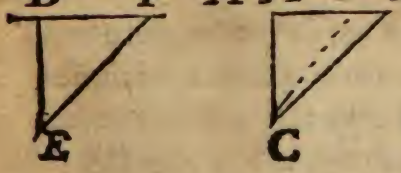
Que les lignes AB, CD ſoient paralleles, & que la ligne EF ſoit perpendiculaire à la ligne AB; en ſorte que les angles FEA FEB ſoient eſgaux, & droits; ie dis que la meſme ligne EF, eſt perpendiculaire à CD, c'eſt à dire que les angles, EFD, EFC ſont eſgaux: couppez les lignes AE, EB eſgales entre elles: & (par l'onzieſme) *tirez deux lignes perpendiculaires à AB qui ſoient AC, BD, tirez auſſi les lignes EC, ED.*

Demonſtration, dans les triangles CAE, EBD, les coſtez AE, EB ont eſté faits eſgaux, de plus les coſtez AC, BD ſont eſgaux (par la definition des paralleles) *les angles A & B eſtant droits ſont auſſi eſgaux; doncques* (par la 4.) *les baſes EC,*

ED ſont eſgales, & les angles AEC, BED ſont auſſi eſgaux; leſquels eſtant oſtez des angles droicts AEF, BEF, reſtent les angles eſgaux CEF, DEF : de meſme les triangles CEF, DEF ayant le coſté FE commun, & les coſtez CE, DE, ayant eſté demonſtrés eſgaux, comme auſſi les angles CEF.FED : ils auront auſſi (par la 4.) *les angles EFD, EFC eſgaux & droits : doncques la ligne EF eſt perpendiculaire à CD.*

Lemme ſecond.

Si deux triangles rectangles ont deux coſtez eſgaux : ils ſeront eſgaux en tout ſens.



Que les deux triãgles ABC, DEF, ſoient rectãgles aux poincts A, & D, & qu'ils ayent eſgaux les coſtez AC, DE; CB EF : ie dis que

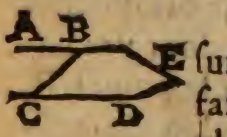
l'autre coſté AB eſt eſgal au coſté DF : car s'il n'eſt pas eſgal, l'vn d'eux ſera plus grand : que ce ſoit AB, retranchez AG, eſgal à DF, & tirez la ligne GC.

Demonſtration, parce que les triangles, CAG, DEF, ont eſgaux les coſtez, AC, DE, AG, DF. eſgaux, & que les angles droits A & D ſont eſgaux, les baſes EF, CG ſeront eſgales (par la 4.) *d'autre part l'angle externe HAC qui eſt droit, eſt plus grand* (par la 16.) *que les angles AGC, ABC qui par conſequent ſeront aigus, doncques l'angle CGE eſt obtus,* (par la 13.) *& l'angle CBG aigu : en ſuite* (par la 19.) *le coſté CB ſera plus grand que les coſtez EF, & CG: ce qui eſt contre la ſuppoſition : car on vouloit que les coſtez EF, BC fuſſent eſgaux.*

PROPOSITION XXVII.

Theoreme.

Si vne ligne en tombant ſur deux autres, fait auec l'vne & auec l'autre des angles égaux entr'eux elles ſeront paralleles.



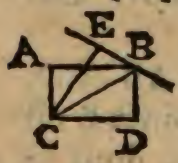
Que la ligne BC, tombe ſur les lignes AB, CD; & faſſe auec elles ces deux angles égaux ABC, BCD: je dis en premier lieu, que les lignes AB, CD ne ſe coupperont iamais, encore qu'on les produiſe tant qu'on voudra; *& c'eſt ſeulement ce qu'a demonſtré Euclide.*

Demonſtration. Si les lignes AB, CD, ſe pouuoient rencontrer au poinct E; il ſe formeroit vn triangle BCE, dont le coſté EB eſtant alongé iuſques au poinct A. (*Par la 16.*) l'angle ABC externe, ſeroit plus grand que l'interne BCE, ce

qui eſt contre la ſuppoſition.

Mais parce que quelqu'vn pourroit conceder que les lignes AB, CD ne ſe rencontreront point, & cependant nier qu'elles ſoient paralleles, c'eſt à dire qu'elles ſoient par tout également diſtantes; comme il arriue à la conchoide, afin que la propoſition ſoit entiere; ie dois prouuer qu'elles ſont equidiſtantes.

Que la ligne BC tombe ſur les lignes AB, CD : en ſorte que les deux angles ABC, BCD ſoient égaux; je dis qu'elles ſont paralleles: car ſi elles ne ſont pas paralleles, l'on pourra tirer par le poinct B, vne ligne parallele à CD; qu'on s'imagine qu'elle eſt tirée, & que c'eſt EB, à laquelle du poinct C, on tirera vne perpendiculaire CE; & du poinct B, on tirera BD perpendiculaire à CD.



Demonſtration : Puiſque la ligne CE, eſt perpendiculaire à la ligne EB, elle ſera égale à la ligne BD, (*par la déf. des parall.*) ainſi puiſque dans les triangles BCE, BCD, qui ſont rectangles, les côtez CD, BD, ſont égaux & CB eſt

commun (*par le lemme* 2.) les triangles seront égaux, en tout sens ; & les angles EBC, BCD sont égaux : or l'angle ABC estoit supposé égal à l'angle BCD ; doncques les angles EBC, ABC, seroient égaux, ce qui est absurde, puisque l'vn est le tout, & l'autre vne partie : on ne peut doncques tirer d'autre parallele, que la ligne AB.

PROPOSITION XXVIII.

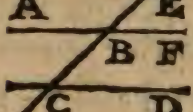
Theoreme.

Si vne ligne couppant deux autres lignes fait l'angle externe égal à l'interne opposé : ou les deux internes du mesme costé, esgaux à deux droits : les lignes sont paralleles.

Que la ligne BC, couppe les lignes AB, CD, & fasse l'angle externe EBF, égal à l'interne oppoſé BCD ; je dis que les lignes AB, CD sont paralleles.

Demonstration. L'Angle ABC est égal

à l'oppoſé EBF, (*par la* 15.) or eſt-il que l'angle EBF eſt ſuppoſé eſgal, à l'angle BCD ; donc les angles ABC, BCD, ſont égaux, & (*par la* 27.) les lignes AB,CD, ſont paralleles.



Secondement, que les angles internes FBC, BCD ſoient égaux à deux droits: je dis que les lignes AB,CD ſont paralleles.

Demonſtration. Les angles ABC,FBC (*par la* 13.) ſont égaux à deux droits : doncques ils ſont égaux aux angles FBC, BCD, que l'on a ſuppoſé eſtre de meſmes égaux à deux droits : oſtez ce qu'ils ont de commun, qui eſt l'angle FBC, ce qui reſtera, c'eſt à dire les deux angles ABC, BCD ſeront égaux, ainſi (*par la* 27.) les lignes AB, CD ſont paralleles.

PROPO

PROPOSITION XXIX.

Theoreme.

Si vne ligne couppe deux lignes paralleles : les angles ſuiuans ſeront eſgaux ; ſçauoir eſt l'externe ſera eſgal à ſon interne oppoſé, & les deux internes du meſme coſté ſeront égaux à deux droicts.

Que la ligne BC couppe les paralleles AB, CD ; ie dis premierement que les deux angles ABC ; BCD ſont égaux, : tirez du poinct C la ligne CA perpendiculaire à la ligne AB, & du poinct B vne autre perpendiculaire à la ligne CD.

Demonſtration. Les lignes AC, & BD (*par la definition des paralleles*) ſont eſgales des triangles rectangles ABC, BCD, les coſtez AC, & DB ſont égaux,

& le coſté CB leur eſt commun ; ainſi les triangles ſeront égaux en tout ſens ; (*par le Lemme* 2.) & les angles ABC , BCD, oppoſez aux coſtez eſgaux AC , BD , ſeront égaux.

Secondement , je dis que les angles EBF , BCD ; c'eſt à dire l'externe, & l'interne oppoſé du meſme coſté ſeront eſgaux.

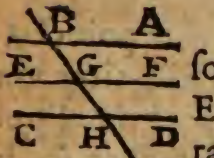
Demonſtration. Les deux angles ABC, BCD ont eſté demonſtrez eſgaux, or eſt-il que les angles ABC , EBF (*par la* 15.) ſont auſſi eſgaux ; donc les angles EBF, BCD ſont eſgaux.

Troiſiémement, les angles ABC, FBC ſont eſgaux à deux droits (*par la* 13.) doncques ſi au lieu de l'angle ABC, vous ſubſtituez l'angle BCD , qui luy eſt égal, les angles FBC,BCD internes du meſme coſté,ſeront eſgaux à deux droits.

PROPOSITION XXX.

Theoreme.

Les lignes qui ſont paralleles à vne troiſieſme ſont paralleles entre elles.



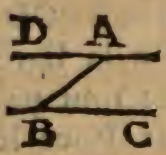
Que les lignes AB, CD, ſoient paralleles à la ligne EF; ie dis qu'elles ſont paralleles entre elles. Pour le conceuoir, faites que la ligne BH, les couppe toutes trois.

Demonſtration. Puiſque les lignes EF, & AB, ſont paralleles, les angles ABG & BGE, ſeront eſgaux (*par la* 29.) de méme puiſque les lignes EF, CD ſont paralleles, l'angle externe, BGE, ſera égal à l'interne GHC, (*par la meſme*) doncques les angles ABG, GHC, ſeront égaux: enſuite les lignes AB, CD ſont paralleles (*par la* 27.)

PROPOSITION XXXI.

Probleme.

La maniere de tirer par vn poinct donné, vne parallele à vne ligne proposée.



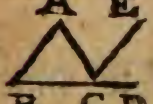
Si l'on assigne le poinct A, par lequel il faille tirer vne ligne parallele à la ligne BC; tirez du poinct A, la ligne AB, comme il vous plaira, & (*par la* 23.) faites l'angle BAD, esgal à l'angle ABC: je dis que la ligne AD, sera parallele à la ligne BC.

Demonstration. Puisque les angles DAB, ABC sont égaux, les lignes AD, BC (*par la* 27.) sont paralleles.

PROPOSITION XXXII.

Theoreme.

En toute ſorte de triangle ayant eſtendu vn coſté ; l'angle externe eſt eſgal aux deux internes oppoſez. Et tous les angles d'vn triangle, ſont eſgaux à deux droicts.



Que l'on faſſe le triangle ABC, & que l'on eſtende le coſté BC tant que l'on voudra, ie dis que l'angle externe marqué dans la figure ACD, eſt eſgal aux deux angles internes A, & B pris enſemble. Pour le demonſtrer tirez par le poinct C, la ligne CE parallele à AB, (*par la* 31.)

Demonſtration. Puiſque les lignes AB, EC, ſon paralleles, les deux angles ECA, CAB, ſeront eſgaux (*par la* 29.) & (*par la meſme*) l'angle externe ECD, & l'interne B, ſeront eſgaux ; doncques l'angle

total ACD eſt égal aux deux angles A, & B mis enſemble.

Ie dis en ſecond lieu que les trois angles du triangle ABC valent deux angles droits.

Demonſtration. L'angle ACD, auecque l'angle ACB, (*par la* 13.) valent deux droits au lieu de l'angle ACD, ſubſtituez les angles A & B qui luy ſont égaux, les angles ACB, A & B ſeront égaux à deux droits.

Corollaires.

1 Les trois angles d'vn triangle, ſont égaux aux trois angles d'vn autre triangle.

2 Si dans vn triangle il y a vn angle droit, ou vn obtus, les autres deux ſeront aiſgus.

3 Si les deux angles d'vn triangle, ſont égaux, aux deux angles d'vn autre triangle; ils auront le troiſieſme angle égal.

4 On ne peut tirer d'vn poinct qu'vne perpendiculaire à vne ligne, parce qu'on

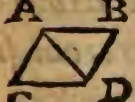
formeroit vn triangle qui auroit deux angles droits.

5 La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes, qu'on puiſſe tirer d'vn poinct à vne ligne ; parce que les autres ſeront oppoſées à l'angle droit, & la perpendiculaire eſt oppoſée à vn angle aiſgu.

PROPOSITION XXXIII.

Theoreme.

Deux lignes qui en ioignant deux autres paralleles, & eſgales ; ſeront auſſi paralleles, & eſgales.



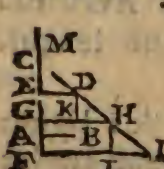
Les lignes AC, BD ioignant les deux lignes AB, CD qui ſont paralleles, & égales : je dis que les lignes AC, BD ſont égales ; & paralleles. Pour le conceuoir ; tirez la ligne AB.

Demonſtration. Puiſque les lignes AB ; CD ſont paralleles, les deux angles

BAD, ADC seront égaux (*par la* 29.) ainsi dans les triangles ABD, ACD, le costé fermé par la ligne AD estant commun, les costez AB, CD estant égaux; de mesme que les angles BAD, ADC (*par la* 4.) les bases AC, BD seront égales; & les deux angles BDA, DAC seront égaux; d'où il suit (*par la* 27.) que les lignes AC, BD seront paralleles.

On peut icy prouuer facilement l'Axiome onziéme d'Euclide, que l'on peut proposer ainsi.

Si vne ligne tombant sur deux autres, fait les angles internes du mesme costé plus petit que deux droits, ces deux lignes se rencontreront si on les estend du mesme costé.



Que la ligne CA, conppe les lignes CD, & AB: en sorte que les angles ACD, CAB soient moindres que

deux droits ; ie dis que si vous alongez les lignes AB, CD du costé de B, & de D, elles se rencontreront : car puisque les angles BAC, ACD sont moindres, que deux droits ; l'vn ou l'autre sera aisgu ; que ce soit l'angle C, du poinct D : tirez vne parallele à la ligne AB, (par la 31.) *elle tombera entre A & C, ne pouuant tomber au poinct C, ny au delà ; par exemple au poinct M ; parce que les angles BAC, BAF sont égaux à deux droits ils seront plus grands que les angles BAC, ACD, & ostant le commun BAC, l'angle BAF, sera plus grand que ACD ; si doncques la parallele DE tomboit sur C, ou sur M, l'angle DEF interne, seroit plus petit, que l'angle externe BAF :* (contre la 29.) *prenez les lignes EG, CF chacune égale à la ligne CE, & ce iusques à ce que vous soyez arriué sous le poinct A : prenez tout de mesme dans CD, autant de lignes égales à CD, lesquelles soient DH, HI, & des poincts D & H, tirez* (par la 31.) *des lignes paralleles à la ligne CF ; & égales à la ligne CE : enfin tirez les lignes GK, KH FL, LI,*

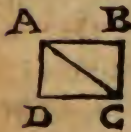
Demonſtration. Les lignes ED, GK ioignent les lignes EG, DK, qui ſont paralleles, & égales; donc (par la 33.) *elles ſont paralleles, & égales*: (& par la 29.) *les angles GKD, KDE ſont égaux à deux droits, comme auſſi* (par la meſme) *l'angle externe KDH, eſt égal à l'interne ECD: & les triangles DCE, KDH ſeront égaux en toute maniere* (par la 4.) *& les autres angles DEC, HKD ſeront égaux: or l'angle DEC, eſt égal à l'angle EDK; d'où il ſuit que les angles EDK, DKH ſont égaux, & parce que EDK, GKD ont eſté monſtrez égaux à deux droits; il ſuit que GKD, DKH ſont égaux à deux droits, de plus* (par la 14.) *GKH, ſera vne ligne droite, que nous auons monſtré eſtre parallele à la ligne ED: & parce que cette derniere eſt parallele aux lignes AB, & GH, elle le ſera auſſi à la meſme AB* (par la 30.) *ie monſtreray de meſme façon que FLI eſt vne lig. droite parallele à AB: c'eſt pourquoy ſi vous alongez la ligne AB, puis qu'elle ne peut concourir auec les lignes GH, FI, qui luy ſont paralleles elle, couppera en quelque poinct entre H, & I:*

la ligne CD alongée par les lignes DH, H I.

PROPOSITION XXXIV.

Theoreme.

Les angles, & costez opposez, d'vn parallelogramme sont esgaux; & le diametre le diuise en deux parties esgales.



Qu'on face le parallelogramme ABCD; ie dis que le costé AB est égal au costé CD; & le costé AD, à BC; l'angle A, à l'angle C; & enfin l'angle B, à l'angle D; & que le diametre AC, diuise le parallelogramme; en deux parties égales.

Demonstration. Puisque les lignes AB, & CD sont paralleles; les deux angles BAC, ACD seront esgaux: (*par la 29.*) de mesme, puisque les lignes AD, BC, sont paralleles, les angles BCA, & CAD seront esgaux: c'est pourquoy les

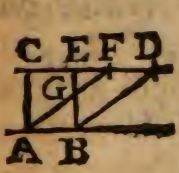
triangles ABC, & ACD, ayant les angles BAC ACD, BCA, CAD tous égaux, & le costé AC estant commun, ils seront esgaux en toute maniere, & les angles B & D opposez au costé commun AC, seront esgaux; de mesme que les costez AB, CD; opposez aux angles esgaux ACB, CAD seront esgaux: j'en dis autant des costez AD, BC; car les angles BCA, CAD estant esgaux, si vous leur adjoustez les angles BAC, ACD, qui sont aussi esgaux, l'angle total A sera égal à l'angle total C, par là il est clair que le diametre diuise la parallelogramme en deux triangles esgaux.

PROPO

PROPOSITION XXXV.

Theoreme.

Les parallelogrammes ſont eſgaux, qui ſont ſur la meſme baſe, & entre deux paralleles.



Les parallelogrãmes ABEC, ABDF, ont la meſme baſe AB, & entre les lignes paralleles AB, CD; ie dis qu'ils ſont égaux.

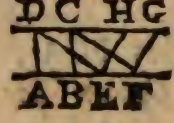
Demonſtration. Les triangles FCA, DEB ont les coſtez AC, EB, égaux, & parce que CE, & FD (*par la* 34.) ſont égaux à AB, ils ſont égaux entre eux: que ſi vous y adjouſtez la ligne commune EF, les coſtez CF, ED ſeront auſſi égaux; les lignes AF, & BD ſont encore égales: (*par la* 34.) doncques (*par la* 8.) les triangles FCA, DEB ſont égaux: retranchez ce qu'ils ont de commun, c'eſt à dire le triangle EGF, les trapezes ACEG,

BGFD ſeront égaux : enfin adjouſtez à ces deux trapezez le triangle AGB, les parallelogrammes ACEB, AFDB ſeront eſgaux.

PROPOSITION XXXVI.

Theoreme.

Les Parallelogrammes ſont eſgaux, qui ont des baſes eſgales, & ſont entre deux paralleles.



Les parallelogrãmes ABCD, EFGH ſont ſur des baſes égales AB, EF: or entre les lignes paralleles AF, DG: je dis qu'ils ſont eſgaux pour le demonſtrer, tirez les lignes DE, CF.

Demonſtration. Les lignes AB, CD. ſont égales, (*par la* 34.) l'on a ſuppoſé que les lignes EF, & AB, ſont égales; enſuite EF, CD. ſont eſgales, elles ſont encore paralleles, ainſi (*par la* 33.) les lignes DE, CF. ſont paralleles, &

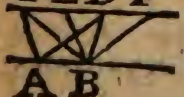
EDCF

EDCF eſt vn parallelogramme, qui ayant meſme baſe DC, & que le parallelogramme ABCD, & eſtant entre les mémes paralleles AF, DG, luy eſt égal; ie prouueray de meſme façon que les parallelogrammes DCFE, EFGH, ayant vne meſme baſe EF, ſont eſgaux, doncques les parallelogrammes ABCD, EFGH eſtant égaux à vn troiſieſme; ſont égaux entre eux.

PROPOSITION XXXVII.

Theoreme.

Les triangles, qui ſont ſur la meſme baſe, & entre deux paralleles, ſont eſgaux.



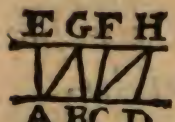
Les deux triangles ABC, ABD ſont ſur la meſme baſe AB, or entre les meſmes paralleles AB, CF; ie dis qu'ils ſont eſgaux: pour le conceuoir tirez deux lignes EB, BF paralleles aux coſtés AC, AD.

Demonſtration ABEC , ABFD ſont des parallelogrammes égaux (*par la* 35.) or les triangles proposés ſont chacun la moitie de ces parallelogrammes (*par la* 34.) doncques ils ſont eſgaux entre eux.

PROPOSITION XXXVIII.

Theoreme.

Les triangles, qui ont des baſes eſgales, & ſont entre deux paralleles, ſont eſgaux.



Les deux triangles ABG, DHC, ont les baſes AB, CD eſgales; & ſont entre les deux paralleles AD , EH , ie dis qu'ils ſont eſgaux : pour le voir, tirés les lignes AE , CF paralleles aux coſtés BG, DH.

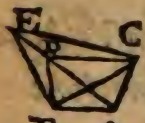
Demonſtration les parallelogrammes ABGE , CDHF , (*par la* 36.) ſont eſgaux ; or les triangles ABG , CDH, ſont les moitiés de ces parallelogram-

mes (*par la* 34.) doncques ils ſont auſſi eſgaux entre eux.

PROPOSITION XXXIX.

Theoreme.

Les triangles eſgaux ſur la meſme baſe, ſont entre deux paralleles.



Les deux triangles ABC, ABD, ſont égaux, & ſur la meſme baſe: ie dis que la ligne CD eſt parallele à la ligne AB, ſi vous niez qu'elle le ſoit, il faudroit que la ligne CE le fut, ou quelque autre ſemblable : ſuppoſé donc que cette ligne CE le ſoit, & eſtendez AD, iuſques à E, & tirez la ligne BE.

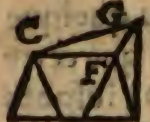
Demonſtration. Les triangles ABC, ABE, eſtant ſur la meſme baſe AB, & entre les meſmes paralleles AB, EC, ſont égaux (*par la* 37.) or eſt-il que le triangle ABD, eſtoit ſuppoſé égal au triangle ABC, donc le triangle ABD

seroit égal au triangle ABE, ce qui est absurde, puisque l'vn est partie de l'autre : on ne peut donc tirer aucune autre parallele à AB, par le poinct C, que celle qui passe par le poinct D, c'est-à dire CD.

PROPOSITION XL.

Theoreme.

Les triangles égaux sur des bases égales situées sur la mesme ligne, sont entre deux paralleles.



Les triangles ABC, DEF, sont égaux ; & ont les bases AB, DE, égales, & sur la mesme ligne AE ; Ie dis que les lignes AE, CF sont paralleles, ou certes il faut que la ligne CG, ou quelque autre pareille soit parallele à la ligne AE : supposé donc qu'elle le soit, alongez le costé DF, iusques à G, & tirez la ligne EG.

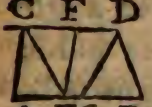
Demon

Demonſtration. Les triangles ABC, DEG eſtant entre les paralleles AE, CG, & ayant des baſes eſgales AB, DE, ils ſont égaux : (*par la* 38.) or le triangle DEF, eſtoit ſuppoſé égal au triangle ABC ; Il eſt donc auſſi égal au triangle DGE, ce qui eſt abſurde, puiſque l'vn eſt vne partie de l'autre : doncques par le poinct C on ne peut tirer d'autre parallele a AB, que la ligne CF.

PROPOSITION XLI.

Theoreme.

Si vn parallelogramme & vn triangle, ont la meſme baſe, ou les baſes égales, & ſont entre deux paralleles, le parallelogramme eſt double du triangle.



Le parallelogramme AEFC, & le triangle GBD, ont les baſes AE, GB, égales, & ſont entre les meſmes paralleles

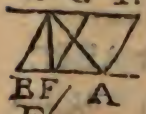
AB, CD : ie dis que le parallelogramme eſt double du triangle : pour le voir, tirez la diagonale EC.

Demonſtration. Le triangle AEC eſt la moitié du parallelogramme AEFC, (*par la* 34.) or le triangle GBD (*par la* 38.) eſt eſgal au triangle AEC ; doncques le triangle GBD, eſt la moitié du parallelogramme AEFC.

PROPOSITION XLII.

Probleme.

Comment l'on peut faire vn parallelogramme qui ayt vn angle determiné, & ſoit eſgal à vn triangle donné.



Il eſt queſtion de faire vn parallelogrãme eſgal au triangle ABC, & qui ayt vn angle eſgal à l'angle E : tirez par le poinct C, vne parallele à la ligne AB, (*par la* 31.) diuiſez la baſe AB en deux

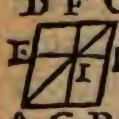
parties esgales au poinct F, faites l'angle AFG, esgal a l'angle E (*par la* 23.) & tirez la ligne AH parallele à FG; je dis que le parallelogramme AFGH a les conditions propoſées.

Demonſtration. Premierement il a l'angle AFC esgal à l'angle E. Secondement il eſt double du triangle AFC, (*par la* 41.) & le triangle ABC, eſt auſſi double du triangle AFC, puiſque les triangles AFC, BFC ſont égaux, comme ayant les baſes esgales, & eſtant entre deux paralleles: ainſi le parallelogramme AFGH eſt égal au triangle ABC.

PROPOSITION XLIII.

Theoreme.

Les deux complements d'vn parallelogramme, ſont eſgaux.



Ie dis qu'au parallelogramme ABCD, les complements EF, GH ſont égaux.

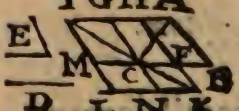
Demonſtration. Les triangles

ACD, ACB ſont égaux (*par la* 34.) & vous retranchez de chacun premierement les triangles AIE AIG, qui ſont égaux (*par la meſme*) en ſecond lieu les triangles FCI, CIH: les parallelogrammes EF, GH qui reſtent ſont eſgaux, & ſont ce que l'on appelle complements (*par la* 35.)

PROPOSITION XLIV.

Probleme.

La façon de former ſur vne ligne donnée, vn parallelogramme eſgal a vn triangle, qui ayt vn angle determiné.



Ie propoſe le triangle ABC & ie veux faire vn parallelogramme qui luy ſoit eſgal, & qui ayant vn coſté eſgal, à la ligne D; ayt encore vn angle égal, à l'angle E. Premierement ie feray (*par la* 42.) le parallelogramme

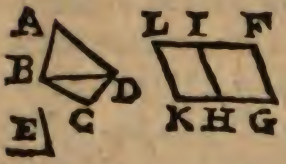
FG eſgal au triangle ABC, & qui ayt l'angle CFH, eſgal à l'angle E : enſuite ie tireray la ligne GI, eſgale à la ligne D, puis auecque la ligne ICK, ie coupperay la ligne HF tirée iuſques au poinct K ; ie feray enfin les lignes IL, MC, LN eſgales à leur oppoſites, ie dis que le parallelogramme CL eſt celuy qu'on demande.

Demonſtration. Premierement (*par la* 43.) il eſt eſgal au complement FG, qui a eſté fait au triangle ABC. Secondement les lignes HF CN, eſtant paralleles ; les angles MCH, CFH ſont égaux (*par la* 29.) comme auſſi MCG, LNC, ainſi l'angle LNC eſt auſſi égal à l'angle E, & à l'angle CFH : enfin les lignes GI, LN ſont égales (*par la* 24.) doncques la ligne GI eſtant eſgale à la ligne D, LN ſera auſſi eſgale à la meſme ligne D.

PROPOSITION XLV.

Probleme.

La methode de décrire vn parallelogramme qui ayt vn angle determiné, & qui ſoit eſgal à vn rectiligne donné.



Ie propoſe le rectiligne ABCD, & il faut décrire vn parallelogramme qui luy ſoit égal, & qui ayt vn angle eſgal, à l'angle E : ie diuiſe le rectiligne en triangles, tirant la ligne BD, puis (*par la* 42.) ie fais égal au triangle ABD, le parallelogramme GI qui aura l'angle G, égal à l'angle E : puis (*par la* 44.) ſur la ligne IH, ie trace vn parallelogramme eſgal au triangle ABD, & qui aura l'angle KHI, eſgal à l'angle E : je dis que GFLK eſt vn parallelogramme ; eſgal au rectiligne ABCD, & qui a l'angle G eſgal à l'angle E. Demonſtra

Demonſtration. Premierement il eſt clair que la figure GFLK eſt égale au rectiligne ABCD; puis qu'elle eſt compoſée de deux parties eſgales, aux deux parties de ABCD, l'angle G a eſté fait égal à l'angle E: & puiſque l'angle G; auec GHI valent deux droits (*par la* 29.) & que l'angle KHI, a eſté fait égal à l'angle E: auſſi bien que G, les angles GHI, KHI vaudront deux droits, donc (*par la* 4.) les lignes GH, HK font vne ligne droite: c'eſt pourquoy de deux parallelogrammes il s'en forme vn total qui eſt GFLK.

PROPOSITION XLVI.

Probleme.

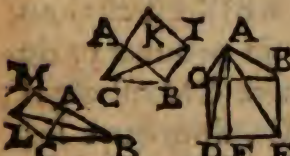
La maniere de décrire vn quarré sur vne ligne.

S'il faut sur la ligne AB, décrire vn quarré : tirez par les poincts A & B deux perpendiculaires à AB, (*par l'onziéme*) & que les lignes AD, BC soient esgales à AB, puis tirez la ligne DC ; & vous aurez fait vn quarré.

Demonstration. Puisque les lignes AD, & BC sont paralleles (*par la* 28.) & qu'elles ont esté faites égales à AB ; les lignes AB, DC, seront aussi esgales, & paralleles (*par la* 33) donc les angles B, & C ; A & D sont égaux à deux droits (*par la* 29.) & les angles A & B, estant droits, les angles D, & C seront droits : Aussi en suite ABCD est vn quarré.

PROPOSITION XLVII.

Au triangle rectangle, le quarré du costé opposé à l'angle droict, est esgal au deux quarrez des autres costez pris ensemble.



Soit tracé le triangle ABC, qui ayt l'angle BAC droict. Ie dis que le quarré BD, décrit sur le costé BC opposé à l'angle droict, est esgal aux deux quarrez BK, AL décrits sur les autres côtez AB, AC : outre cela tirez la ligne AF, parallele aux lignes BE, & CD ; tirez aussi les lignes AD, AE, BL, CI, *pour éuiter la confusion, i'ay tracé trois fois le triangle ABC.*

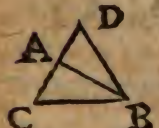
Demonstration: Aux triangles ABE, IBC, les costez AB, IB sont égaux, puisque ABIK est vn quarré : i'en dis autant des costez BE, BC parce que CBED est aussi vn quarré : de plus les angles CBI,

ABE ſont eſgaux, puis qu'ils adjoûtent aux angles droits ABI CBE, le meſme angle ABC : ainſi les triangles ABE, CBI ſont eſgaux (*par la* 4.) or le parallelogramme FB eſt double du triangle ABE (*par la* 41.) puiſque tous deux ont vne meſme baſe BE,& ſont entre deux paralleles AF, BE. De meſme le quarré ABIK eſt double du triangle CBI; enſuite le quarré ABIK eſt égal au parallelogramme FB : je prouueray de méme façon que le quarré CM,eſt eſgal au parallelogramme FC, doncques les quarrez CM, BK mis enſemble, ſont égaux, aux parallelogrammes FB, FC, c'eſt à dire au quarré BCDE.

PROPOSITION XLVIII.

Theoreme.

Si en vn triangle le quarré d'vn coſté eſt eſgal aux quarrez des deux autres coſtez ; l'angle opposé à ce premier coſté ſera droit.



Ie trace le triangle ABC, & ie fais que le quarré du coſté CB ſoit eſgal aux quarrez des coſtez AC, AB : je dis que l'angle BAC eſt droit ; tirez la ligne AD perpenduculaire à AB, & égale à AC, puis tirez la ligne BD.

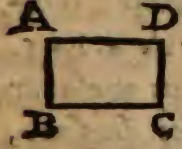
Demonſtration. Puiſque l'angle BAD. eſt droit ; le quarré de BD ſera eſgal aux quarrez de AB, AD, ou AC (*par la* 47.) or eſt-il que le quarré de BC eſt auſſi eſgal aux meſmes quarrez de AB, AC ; doncques les quarrez de BC, & de BD ſont eſgaux ; enſuite les lignes BD, & BC, ſont égales : ainſi, puiſque les triangles ABD, ABC ont tous les

costez esgaux (*par la* 8.) ils seront égaux en toute maniere, & l'angle BAC, sera égal à BAD qui est droit : doncques l'angle BAC est vn angle droit.

LIVRE SECOND DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

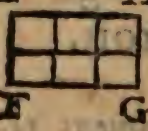
1. Vn parallelogramme rectangle eſt compris ſous deux lignes, qui forment vn angle droit.



Il faut premierement remarquer, que par le mot de rectangle, nous entendons vn parallelogramme, duquel tous les angles ſont droits : or nous determinons ſuffiſamment vn rectangle, quand nous

aſſignons ſa longueur, & ſa largeur, nommant les deux lignes voiſines, comme dans le rectangle ABCD, ſi nous determinons les coſtez AB, BC parce que les autres ſont eſgaux à ceux-cy : c'eſt pourquoy, ſi deux rectangles, ont les deux lignes voiſines eſgales, ils ſeront eſgaux.

Nous conceuons qu'vn rectangle eſt tracé de cette ſorte, que la ligne AB, perpendiculaire à BC, ſoit tranſportée de B en C : ce mouuement reſpond à la multiplication arithmetique ; & tout de meſme que conduiſant la ligne perpendiculaire AB, ſur B iuſques à C, ie fais le rectangle ABCD, ainſi multipliant le coſté AB, par BC, ie forme le meſme rectangle, ce que i'explique ainſi.

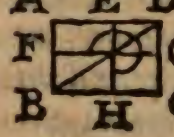


Pour determiner la longueur d'vne ligne, nous nous ſeruons d'vne meſure qui nous ſoit connuë ; comme quand nous diſons vne ligne de 4. ou 5. pieds : ainſi quand nous voulons meſurer l'aire, ou la capacité de quelque ſurface, nous la meſurons par des quarrez ; comme ſeroit vn quarré, qui ayt chaque coſté

vn pied de long, que l'on nomme vn pied quarré: La raiſon pour laquelle nous nous ſeruons pluſtoſt du quarré, que d'aucun autre meſure, eſt que ſa longueur eſtant eſgale à ſa largeur, nous n'auons beſoing que de nommer vne de ſes dimenſions: or ſçachant la longueur & la largueur d'vn rectangle, nous connoiſſons facilement, par le moyen de la multiplication, le nombre des quarrez qu'il contient, comme ſi l'on propoſe le rectangle EFGH; *dont le coſté* FG, *ſoit de* 3. *pieds, & le coſté* FE *de deux, ie dis deux fois trois font ſix, qui eſt le nõbre des petits quarrez que contient le rectangle* FEHG, *la raiſon en eſt claire: car ſi la figure auec la longueur de trois pieds, n'auoit la largeur que d'vn pied, on feroit ſur la ligne* FG, *vn ſeul rang contenant trois quarrez; mais il a la largeur de deux pieds: on peut donc faire deux rangs chacun de trois quarrez. Ainſi puiſque par la multiplication, l'on connoiſt la capacité d'vn rectangle, quelques vnes des propoſitions ſuiuantes ſe pourront prouuer par les nombres.*

2. Definition, au rectangle ayant tiré

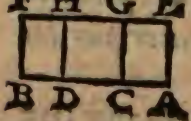
vne diagonale, vn des rectangles par lesquels passe la diagonale, auecque les deux complements s'appellent Gnomons.



Comme au rectãgle ABCD. si vous prennez le rectangle EG, auecque les complements EF, HG, ces trois rectangles s'appellent Gnomons; parce qu'ils ont la figure d'vne esguierre.

PROPOSITION I.
Theoreme.

Si l'on propose deux lignes, l'vne desquelles demeure entiere, & l'autre soit couppée en plusieurs segments; le rectangle compris sous ces deux lignes, est esgal à tous les rectangles compris sous l'entiere, & sous les segments de celle qui est diuisée.



Que l'on diuise la ligne AB, en autant de segments qu'on voudra: AC, CD, DB; & que la ligne AE, demeu-

re entiere : je dis que le rectangle compris ſous AB, AE, eſt égal aux rectangles compris, tant ſous AE AC ; & ſous AE CD ; que ſous AE BD mis enſemble ; c'eſt à dire, que ſi on fait vn rectangle qui ayt vne ligne eſgale à AB, & l'autre à AE ; & que de l'autre coſté on faſſe trois rectangles, dont le premier ayt vn coſté eſgal à AE, & l'autre à AC, le ſecond ayt vn coſté eſgal à AE, & l'autre à cD ; & le troiſiéme ayt vn coſté égal à AE, & l'autre à BD ; que le premier rectangle tout ſeul ſera eſgal à ces trois derniers. Pour le conceuoir tirez par les poincts C & D des paralleles à la ligne A E.

Demonſtration. Le rectangle AF eſt compris ſous les lignes AB, AE ; le rectangle AG eſt compris ſous les lignes AE, AC ; le rectangle CH eſt compris ſous les lignes DC, & CG qui ſont égales à AE, & le rectangle DF eſt compris ſous les lignes BD, & DH eſgales aux lignes AE : or le rectangle AF, eſt eſgal aux rectangles AG, CH, DF, c'eſt à dire, à toutes ſes parties : doncques le rectan-

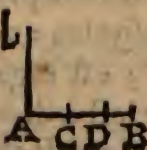
gle compris ſous AB, & ſous AE, eſt égal aux rectangles compris ſous AE, AC; AE, DC; AE, BD.

Nous pouuons monſtrer le meſme par nõbres, ainſi la ligne AB, ſoit de 9. pieds, & la ligne AE de 5. que le ſegment AC ſoit de trois pieds, CD de 4. & BD de deux. Ie dis que 9. fois 5. c'eſt à dire 45. eſt eſgal à 3. fois 5. c'eſt à dire 15. à quatre fois, 5. c'eſt dire 20. & à deux fois 5. qui font 10. car 15. 20. & 10. font 45.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Si vne ligne eſt couppée en pluſieurs ſegments; les rectangles compris ſous toute la ligne, & ſous chaque ſegment, ſeront eſgaux au quarré de toute la ligne.



Que la ligne AB, ſoit couppée en pluſieurs ſegments AC, CD, DB; je dis que les rectangles compris ſous tou-

te

te la ligne AB, & ſous chaque ſegment AC, CD, DB ſont eſgaux, au quarré de la ligne AB: adjouſtez la ligne Ab qui ſoit eſgale à AB, & par conſequent qui puiſſe eſtre priſe pour elle, & qu'on ne la diuiſe point.

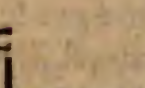
Demonſtration (*par la* 1.) le rectangle compris ſous AB, Ab (qui eſt le quarré de AB) eſt eſgal au rectangle, compris ſous Ab, AC; Ab, CD; Ab, BD. Pour la ligne Ab on peut remettre AB, donc le quarré de AB, eſt eſgal aux rectangles compris ſous AB, AC; AB, CD, AB; BD.

Nous demonſtrerons le meſme par les nombres, que AB ſoit de 9. pieds, AC de 3, GD de 4; BD de 2. je dis que neuf fois 9. c'eſt à dire 81. eſt eſgal à 3. fois 9. à 4. fois 9. & à 2. fois 9. car 27. 36. & 18. font 81.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Si on couppe vne ligne en deux ſegments ; le rectangle compris ſous toute la ligne, & ſous vn des ſegments, eſt eſgal au quarré de ce ſegment, & au rectangle compris ſous les deux ſegments.



Que l'on couppe la ligne AB, au poinct C : je dis que le rectangle compris ſous AB & ſous AC, eſt eſgal au quarré de AC, & au rectangle compris ſous les ſegments AC, CB. Pour le conceuoir, tracez la ligne AC, c'eſt à dire, faites Ac eſgale à AC.

Demonſtr. (*par la* 1.) Le rectangle compris ſous les lignes AB, Ac, eſt eſgal aux rectangles compris tant ſous les lignes AC, Ac, que ſous les lignes Ac & cB.

or le rectangle compris sous les lignes Ac, & AC est le quarré de Ac, puisque les lignes AC, & Ac sont esgales, doncques le rectangle compris sous les lignes AB; & Ac, ou AC, est esgal au quarré de AC, & au rectangle compris sous les lignes Ac ou AC & cB.

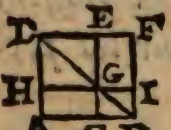
Par les nombres que la ligne AB soit de 7. pieds, Ac de 3, cB de 4, je dis que 3. fois 7. ou 21. est égal à 3. fois 3, qui est 9, & à 3. fois 4. qui est 12.

Que ceux qui commencent ne perdent pas courage encore qu'ils ne puissent pas si facilement conceuoir les propositions de ce liure.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Si vne ligne eſt diuisée en deux ; de quelque façon que ce ſoit ; le quarré de toute la ligne, eſt eſgal aux quarrez des deux ſegments, & à deux rectangles, compris ſous les ſegments.



Que l'on diuiſe la ligne AB en deux ſegments AC, CB; je dis que le quarré de la ligne AB eſt égal, aux quarrez des ſegments AC, & CB; & à deux rectangles compris chacun ſous les lignes AC, CB. Pour le conceuoir, faites vn quarré ſur AB, qui ſoit AF; puis tirez la diagonale DB, & par le poinct C, tracez vne parallele à la ligne AD; qui couppe la diagonale en G; puis par le poinct G, tirez la ligne HI parallele à la ligne AB.

Demonſtration. Ie dois premierement monſtrer que CI eſt le quarré de CB; car puiſque les coſtez AB, AD ſont eſgaux, les angles ADB, ACB ſeront eſgaux: (*par la 5. du 1.*) & puis que les lignes CE, & AD ſont paralleles; les angles CGB, ADB ſeront eſgaux, & chacun ſera la moitié d'vn droict, doncques les angles CGB, CBG ſont eſgaux, les lignes CB, & CG ſont eſgales, (*par la 6.*) les lignes auſſi GI, IB ſont eſgales à leur oppoſez (*par la 24. du 1.*) Il eſt auſſi facile de monſtrer que les angles I, & C, eſtant droicts, les angles CGB, & CBI, ſont demi-droicts; à cauſe que les lignes HI, AB, DF ſont paralleles, & que l'angle FA, & les autres ſont droits. Ie prouueray de meſme façon que le rectangle HE, eſt le quarré de HG, ou de AC. Le rectangle AG eſt compris ſous les lignes AC, à CG, eſgales à la ligne CB: il eſt donc compris ſous les lignes AC & CB: de meſme le rectangle GF, eſt compris ſous les lignes EG, ou HG, & AC qui luy ſont eſgales, & ſous la ligne GI, ou CB; il eſt donc compris ſous les lignes

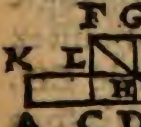
AC,& CB : or il eſt euident que le quarré AF eſt eſgal à toutes ſes parties qui ſont les quarrés HE, & CI, & les rectangles AG, & CF, doncques le quarré de AB eſt eſgal aux quarrez de AC, & CB, & à deux rectangles, compris ſous AB, BC.

Par les nombres que AB, ſoit de 7. pieds, AC de 5. & BC de deux. Ie dis que 7. fois 7. ou 49. eſt eſgal à 5. fois 5. à 2. fois deux, & à 2. fois 5. pris deux fois: c'eſt à dire que 49. eſt eſgal à 25. à 4. à 10. à 10.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Si vne ligne eſt diuisée en ſon milieu & ineſgalement en vn de ſes ſegments, le rectangle compris ſous les ſegments ineſgaux, auec le quarré du ſegment du milieu, ſont eſgaux au quarré de la moitié de la ligne.



La ligne AB, eſt diuiſée par le milieu, au poinct C, & ineſgalement au poinct D. Ie dis que le rectangle compris ſous AB, & ſous DB, qui ſont les ſegments ineſgaux; auec le quarré de CD, ſont égaux au quarré de CB, qui eſt la moitié de la ligne. Pour le conceuoir faites vn quarré ſur CB, & ayant tiré le diametre FB, tirez DG parallele à BE, & à FC, laquelle couppe le diametre au poinct H, par ou vous tirerez la ligne

HK parallele à AB, & la ligne AK parallele à CF.

Demonſtration. Premierement il faudroit prouuer que LG eſt le quarré de CD, ce que i'ay fait en la propoſition precedente, comme auſſi que DI eſt vn quarré; & qu'enſuite AH eſt compris ſous AD, & ſous DH, ou ſous DB, ſoit eſgale. Ie monſtre auſſi que le rectangle DE eſt eſgal, à la ligne AL; parce que les lignes AC & CB ſont eſgales, comme CB, & EB: doncques AC & BE ſont égales, de meſme que HD, & DB: enſuite les rectangles AL, & DE ſont égaux; auſquels ſi vous joignez CH, le rectangle AH ſera égal au Gnomon CIG, adjouſtez le quarré LG, qui eſt le quarré de CD, pour lors le rectangle AH, compris ſous AD, & ſous DB, auec le quarré de CD, ſeront égaux au Gnomon CIG, ioint au quarré de CD, c'eſt à dire au quarré de CB.

Pour les nombres, ie ſuppoſe que AB ſoit 10. AC 5. CD 3. DB 2. Ainſi quand ie dis que le rectangle compris ſous AD 8. & ſous DB 2. c'eſt à dire 2. fois 8. ou ſeize,

auec le quarré de CD 3. qui eſt 9. ſont égaux au quarré de CB, qui eſt 5. & ſont 25. car 16. & 9. ſont 25.

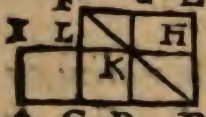
PROPOSITION VI.

Theoreme.

Si à vne ligne diuisée par le milieu, on adioûte vne autre ligne, le rectangle compris ſous toute la ligne composée: & ſous celle que l'on a adioûtée, ioint au quarré de la moitié de la ligne; eſt eſgal, au quarré tant de la ligne composée, que de la moitié de la ligne, & de celle que l'on a adiouſtée.

Que l'on diuiſe la ligne AB par le milieu en C, & qu'on luy adiouſte la ligne BD, ie dis que le rectangle compris ſous AD, BD, ioint au quarré de CB, eſt eſgal au quarré de CD, pour le voir faites ſur CD le quarré CE, & ayant ti-

ré la diagonale FD : tirez encore par B, vne ligne BG, parallele à CF,& à DE; laquelle couppe la diagonale FD, au poinct K;par où vous tirerez la ligne HI parallele à AD : tirez auſſi AI parallele à CF.



Demonſtr.BH eſt vn quarré, comme nous auons demontré cy-deſſus,LG eſt le quarré de LK,ou de CB.Les rectangles AL, CK ſont eſgaux (*par la* 38. 1.) puiſque la ligne AB a eſté diuiſée par le milieu; CK, KE ſont auſſi égaux (*par la* 43. du 1.) donques AL, & KE ſont eſgaux; adjouſtez à toutes deux la Gnomon GCH, le quarré CE, ſera égal au rectangle AH pris auec le quarré LG, le rectangle CH eſt compris tant ſous la ligne AD compoſée de AB & de BD adjouſtée;que ſous la ligne DH égale à l'adjouſtée BD, puiſque BH eſt vn quarré, Le quarré CE, eſt le quarré de CD compoſé de la moitié de AB, & de l'adjouſtée BD; doncques la ligne AB eſtant diuiſée par le milieu au poinct C, & adouſtant la ligne BD, le rectangle ſous

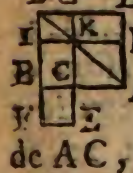
les lignes AD, & BD, joint au quarré de BC, eſt eſgal au quarré de BD.

Par les nombres, AB ſoit 6. AC 3. CB 3. & BD adjouſtée ſoit 4. le rectangle AH ſera 4. fois 10. qui ſont 40. le quarré de CB 3. fois 3. qui ſont 9. & tous aſſemblés ſont 49. or le quarré de BD 7. fait auſſi 49.

PROPOSITION VII.

Theoreme.

Si vne ligne eſt diuisée, le quarré de toute la ligne, & le quarré d'vn des ſegments, eſt eſgal aux deux rectangles compris ſous toute la ligne, & ſous ledit ſegment, ioint au quarré de l'autre ſegment.



Diuiſez la ligne AB au poinct C : je dis que deux rectangles, compris ſous AB, & ſous BC, auec le quarré de AC, ſont eſgaux au quarré de AB, &

de CB. Pour le voir, faites le quarré de AB, qui soit BL diuisez-le à l'ordinaire par la diagonale : adjoustez le quarré de BC, qui soit BL.

Demonstration. Les deux quarrez BL, & BE, sont égaux au rectangle IL compris sous la ligne DL, ou sous AB, & DI, esgale à DG ou BC : & au rectangle IE, compris sous IF, égale à AB, puisque AC, CK, ou IB sont esgales, CH estant vn quarré ; BF aussi est égale à BC, BE, estant aussi vn quarré. Ces deux quarrez dis-je sont esgaux au rectangle IE compris sous IF, ou sous AB FE, ou BC; & au quarré CH, donc le quarré de AB, & BC, sont égaux à deux rectangles compris sous AB, BC, & au quarré de AC. Ie ne prouue pas que IG, CH, sont des quarrez, parce que i'ay demonstré en la 4. que les rectangles formez dans vn quarré, par lesquels passe le diametre, sont aussi quarrez.

Par les nombres, AB soit 5. BC 2. AC 3. 5. fois 5. sont 25. & deux fois 2. sont 4. 25. & 4. font 29. 5. fois pris deux fois sont 10. 10. pris deux fois font 20. &

le

e quarré de trois eſt neuf, qui font
vingt-neuf.

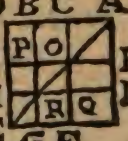
PROPOSITION VIII.

Si vne ligne eſt diuisée, quatre rectangles compris ſoubs toute la ligne, & vn des ſegments, auec le quarré de l'autre ſegment, ſont égaux au quarré de la ligne composée de toute la ligne & de ce premier ſegment.

Diuiſez la ligne AB au poinct C, ie dis que quatre rectangles compris ſous les lignes AB, & BC auec le quarré de AC, ſont eſgaux au quarré de la ligne AD composée de AB, & de la ligne BD égale à Bc. Pour le prouuer faites le quarré de AD, puis ayant tiré la diagonale AE, tirez par les poincts B, & C, les lignes CF, BG; paralleles à DE, & par les poincts R & O, tirez des paralleles à AB.

Demonſtration. le quarré de AD, qui

eſt AE, eſt eſgal à toutes ſes parties : dont la premiere eſt le quarré de AC, qui eſt CH, les rectangles BM, CR compris ſous CQ eſgale à AB, puiſque Co, MG ſont des quarrez, de BC, & de DB égales, ainſi Co eſtant eſgales à AC, & oQ à oP ou BC, Cq ſera eſgale à AR. LR ſera auſſi eſgale à AB, donc les rectangles BQ, BM, LG ſont compris ſous AB, BC ; reſte encore oL, & MG qui ie dis compoſer vn rectangle compris ſous AB, BC; car oL eſt eſgal à Bo, (*par la* 43. *du* 1.)



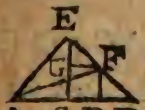
& MG à PQ : doncques oL & MG ſont eſgaux à BQ, qui eſt compris ſous AB, BC, ainſi AE quarré de AD, eſt eſgal à CH, quarré de AC & à 4. rectangles compris ſous AB, BC,

Par les nombres : AB ſoit 7. AC 4. BC 3. BD 3. AD 10. le quarré de AD 10. fois 10. c'eſt à dire 100. eſt eſgal à 4. rectangles ſous AB 7. BC 3. car 3. fois 7. ſont 21. quatre rectangles de 21. chacun font 84. le quarré de AC eſt 4. 4. fois 4. font 16, qui adiouſtez à 84. font 100.

PROPOSITION IX.

Si vne ligne eſt diuisée par le milieu, & ineſgalement les quarrez des parties ineſgales, ſeront doubles du quarré de la moitié de la ligne, & du quarré du ſegment du milieu.

Que la ligne AB ſoit diuiſée par le milieu au poinct C, & ineſgalement au poinct D. Ie dis que les quarrez de AD, & DB; ſont doubles des quarrez de AC, & de CD. Pour le voir, tirez la perpendiculaire CE, eſgale à AC, enſuite faites les lignes AE, EB, puis la perpendiculaire DF, & par le poinct F, ayant tiré vers la ligne EC, la parallele FG, tracez auſſi la ligne AF.



Demonſtration. Les lignes AC, CE eſtant eſgales, les angles CAE, CEA ſeront eſgaux: (*par la 5. du 1.*) & l'angle C, eſtant droit, l'angle AEC ſera demi-droit: (*par la 32. du 1*)

de meſme que l'angle CEB : doncques l'angle total AEB ſera droit. Les lignes GF, GE ; FD, DB ſeront eſgales ; parce que l'angle B eſtant demi-droit, DFB ſera auſſi demi-droit, ainſi les lignes DB, DF, (*par la 6. du 1.*) ſont eſgales. L'angle C eſtant droict, le quarré de AE ſera eſgal aux quarrez de AC & de CE, (*par la 47. du 1.*) leſquels eſtant eſgaux, le quarré de AE ſera double du quarré de AC, de meſme le quarré de EF, ſera double du quarré de GF, ou de CD : or l'angle AEF eſt droit ; donc (*par la 47. du 1.*) le quarré de AF, eſt eſgal aux quarrez de AE, & de EF, & ſera double des quarrez de AC, & de CD. D'ailleurs l'angle D eſtant droit, les quarrez de AD, de DF, ou de DB, ſont eſgaux au quarré de AF, (*par la 47. du 1.*) doncques les quarrez de AD, & de DB ſont doubles des quarrez de AC, & de CD.

Par les nombres AB ſoit 10. AC 5. AD 8. DB 2. les quarrez de 8. & de 2. ſont 64. & 4. qui font 68. or ces quarrez ſont doubles des quarrez de 5. & de 3. qui ſont 25. & 9. qui font 24.

PROPOSITION X.

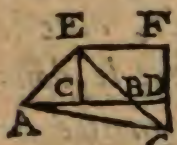
Theoreme.

Si vne ligne eſt diuisée par le milieu, & qu'on luy adiouſte vne autre ligne : le quarré de la ligne qui eſt composée de la premiere ligne, & de celle qu'on a adiouſtée, auec le quarré de l'adiouſtée ; ſont le double, tant du quarré de la moitié de la ligne, que du quarré de la ligne composée de cette moitié, & de la ligne adiouſtée.

Tirés la ligne AB diuiſez-la par le milieu au poinct E, adjouſtez-luy la ligne BD ; je dis que les quarrez de AB, & de BD ſont le double des quarrez de AC, & de CD : pour le voir, tirez par C la perpendiculaire CE eſgale à AC : enſuite faites par le poinct D la perpendiculaire DF, ſur laquelle vous tracerez la perpendiculaire EF, apres quoy vous tirerez

la ligne EBG, & enfin la ligne AG.

Demonſtration. Les lignes AC, CE, eſtant eſgales, & l'angle C eſtant droit: les angles CAE, CEA ſeront eſgaux (*par la 5. du 1.*) & ſeront demi-droits (*par la 33. du 1.*) tout de meſme CEB, CBE & ſon oppoſé GBD ſeront la moitié d'vn droit: enſuite BGD ſera auſſi demidroit, & (*par la 6. du 1.*) les lignes BD, CG ſeront égales. Ainſi ie prouueray que EF, FG, ſont égales: EF, eſt auſſi égale à CD. Il ſẽſuit auſſi que l'angle AEG, compoſé de deux demi-droits, eſt droit, & (*par la 47. du 1.*) que le quarré de AE eſt double du quarré de AC, le quarré de EG eſt double du quarré de EF, ou de CD, puiſque EF, FG ſont eſgales; or le quarré de AG eſt égal aux quarrez de AE, & de EG, & les quarrez de AD, de DG ou de BD ſont eſgaux au quarré de AG; doncques les quarrez de AD & de BD; ſont doubles comparez aux quarrez de AC, & de CD.



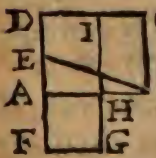
Par les nombres: AB ſoient 6. AC 3. BD 4. le quarré de AD eſt 100. celuy de

BD eſt 16. qui font 116. or ces quarrez ſont doubles du quarré AC qui eſt 9. & du quarré CD qui eſt 49. car 49. & 9. font 58. la moitié de 116.

PROPOSITION XI.

Probleme.

La maniere de diuiſer vne ligne, de ſorte que le rectangle compris, ſous cette ligne, ioint à vn des ſegments, ſoit eſgal au quarré de l'autre ſegment,



Qu'on propoſe la ligne AB pour la diuiſer de la ſorte : faites vn quarré ſur la ligne AB, diuiſez le coſté AD, par le milieu au poinct E, tirez la ligne EB ; eſtendez EA, en ſorte que la ligne EF ſoit eſgale à EB, faites vn quarré ſur AF, & alongés le coſté GH ; je dis que AB eſt diuiſée au poinct H ; en

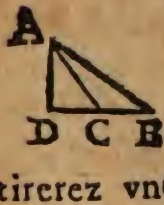
sorte que le rectangle sous AB, BH, qui est CH (la ligne BC estant esgale à AB) est esgal au quarré de AH qui est AG.

Demonstration. (*par la 6.*) la ligne DA ayant esté diuisée en deux, au poinct E, & luy ayant adjousté AF, le rectangle DG, compris sous les lignes DF, & AF, ou FG joint au quarré de AE, sera esgal au quarré de EF ou EB; or puis que l'angle A est droit, le quarré de EB est esgal aux quarrez de AE, & de AB; doncques le rectangle DG, joint au au quarré de AE, est esgal au quarré de AB, & au quarré de AE, maintenant ostes le quarré de AE, le rectangle DH, sera esgal au quarré de AB, qui est AC, que si vous ostez ce qu'ils ont de commun, qui est le rectangle DH, le rectangle HC, sera esgal au quarré AG.

PROPOSITION XII.

Theoreme.

Dans les triangles obtusangles, le quarré opposé à l'angle obtus, est esgal aux quarrez des deux autres costez, & à deux rectangles compris sous le costé, sur lequel tombe la perpendiculaire, & sur ce qui reste iusques à la perpendiculaire.



Au triangle ACB, l'angle ACB est obtus, alongez la ligne CB iusques au poinct D, sur lequel du poinct A, vous tirerez vne perpendiculaire AD : je dis que le quarré de AB, est esgal aux quarrez des costez AC, CB; & à deux rectangles compris sous BC, CD.

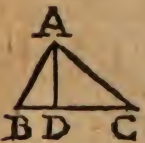
Demonstration. Au triangle ABD, l'angle D estant droit, le quarré de AB (*par la* 47. *du* 1.) sera esgal au quarrés

de AD, & de DB; & parce que la ligne DB, eſt diuiſée au poinct C, le quarré de DB, ſera eſgal aux quarrez de CD, & de CB, & à deux rectangles compris ſous CB, CD, (*par la* 4.) doncques le quarré de AB eſt eſgal aux quarrez de AD, de DC, de CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB; au lieu des quarrez de AD; & de DC, ſubſtituez le quarré de la ligne AC qui leur eſt égal (*par la* 47. *du* 1.) le quarré de AB ſera eſgal au quarrez de AC; & de CB & à deux rectangles compris ſous BC, & ſous CD.

PROPOSITION XIII.

Theoreme.

En toute ſorte de triangle le quarré du coſté oppoſé à l'angle aiſgu & deux rectangles, dont chacun eſt compris ſous la ligne, ſur laquelle tombe la perpendiculaire, & ſous la ligne qui eſt entre l'angle aiſgu, & la perpendiculaire, ſont eſgaux aux quarrez des autres coſtez.



L'angle C du triangle ABC, eſt aiſgu, que ſi vous tirez la perpendiculaire AD. Ie dis que le quarré AB, auecque les deux rectangles compris ſous BC, & ſous DC, eſt eſgal aux quarrez AC, BC.

Demonſtration. (*par la* 7.) la ligne BC ayant eſté diuiſée au poinct D, le quarré de BC auecque le quarré de DC,

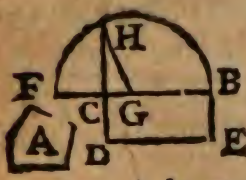
eſt eſgal aux deux rectangles ſous BC, & ſous CD, & au quarré de BD : adjoûtez le commun AD : les quarrez de BC, de DC, & de AD, ſont eſgaux aux quarrez de BD, & de AD, & à deux rectangles compris ſous BC, & ſous CD ; au lieu des quarrez de DC, & de AD, ſubſtituez le quarré AC qui leur eſt eſgal (*par la* 47. *du* 1.) & au lieu des quarrez BD, & AD, ſubſtituez le coſté AB qui leur eſt égal, les quarrez de BC & de AC, ſeront eſgaux au quarré de AB, & à deux rectangles compris ſous BC, & ſous DC.

PROPO

PROPOSITION XIV.

Probleme.

La façon de faire vn quarré eſgal à vn Rectiligne donné.



Ie propoſe le Rectiligne A, auquel il faut faire vn quarré eſgal. Pour cela faites (*par la 45. du 1.*) le parallelogramme rectangle BD, eſgal au rectiligne A. eſtendez le coſté BC, en ſorte que la ligne CF, ſoit eſgale à la ligne CD, & diuiſant FB par le milieu au poinct G, décriuez vn demicercle BHF, enſuite alongez le coſté CD, iuſques au poinct H; je dis que le quatré de CH ſera eſgal au rectangle BD, & conſquemment au rectiligne A.

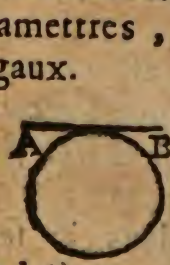
Demonſtration. La ligne BF ayant eſté diuiſée par le milieu au poinct G, & ineſgalement au poinct C, le quarré de la moitié GF, ou de ſon eſgale GH ſera

eſgal au rectangle compris ſous BF, & ſous CF, ou ſous CD, qui eſt le rectangle BD, & au quarré de CG, (*par la* 5.) au lieu du quarré de GH, mettez les quarrez de CG, & de CH, qui luy ſont eſgaux (*par la* 47. *du* 1.) les quarrez de CG, & de GH, ſeront eſgaux, au rectangle BD, & au quarré de CG, que ſi vous oſtez le quarré de CG qui eſt commun, le quarré de CH ſera eſgal au rectangle BD, & enſuite au rectiligne A, corollaire; nous auons en cette propoſition la façon de faire vn quarré eſgal à vn rectangle.

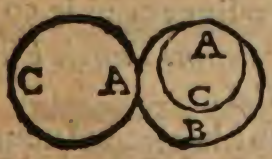
LIVRE TROISIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Les cercles eſgaux ſont ceux dont les diamettres, ou les ſemidiametres ſont eſgaux.

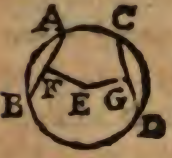
2. 

La ligne tangente, eſt celle qui ne couppe point le cercle, quoy qu'elle le touche & qu'on l'entende au delà du cercle, *comme AB.*

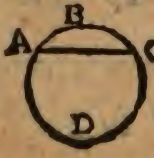
3. 

Les cercles ſe touchent, qui ſe rencontrent ſans ſe coupper : *tels ſont*

les cercles AC, AB : Ils ſe peuuent toucher on par dedans, ou par dehors.



Les lignes dans vn cercle, ſont également diſtantes du centre quand les perpendiculaires tirées du centre à ces lignes, ſon eſgales : *comme les lignes AB, CD ; parce que les perpendiculaires EF, EG, ſont eſgales.*

5. 

Vn ſegment de cercle eſt vne figure compriſe ſous vne ligne droite, & la circonference d'vn cercle : *comme la figure ABC, ou ADC.*

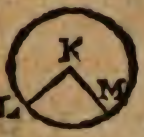
6 L'angle d'vn ſegment, eſt vn angle meſlé, que fait la circonference, auec vne ligne droite ; *comme l'angle BAC, ou DAC.*

7.

L'angle eſt dans le ſegment, dans lequel ſe trouuent les lignes qui le compoſent: *comme l'angle FGH, eſt dans le ſegment FGH.*

8. L'angle repoſe ſur la circonference,

à laquelle il eſt oppoſé : *comme l'angle FGH repoſe ſur la peripherie FIH.*

9. 

Vn ſecteur, eſt vne figure compoſée de deux ſemidiametres, & de l'arc compris entre deux comme KLM.

PROPOSITION I.

Probleme.

Comment l'on peut trouuer le centre d'vn cercle.

Dans le cercle ACBE, tirez la ligne AB, que vous diuiſerez également au point D; puis vous tiretez la perpendiculaire CDE, que vous diuiſerez par le milieu au poinct F. Ie dis que le poinct F, eſt le centre du cercle.

Demonſtration. Si le centre ſe trouue en la ligne CE, il ne peut eſtre autre que

le poinct F : autrement les lignes depuis le centre iuſques à la circonference ne ſeroient pas eſgales : or le centre ne peut eſtre hors de la ligne CE : parce que ſuppoſé qu'il fuſt au poinct G, il s'enſuiuroit vn abſurde : car tirez les lignes GA, GD, GB, les lignes GA, GB, des triangles GAD,& GBD eſtant eſgales *(par la definition du cercle)* AD, DB eſtant auſſi eſgales, & le coſté GD eſtant commun, les triangles ADG, GDB ſeroient égaux, (*par la* 8. *du* 1.) de meſme que les angles GDB,CDA,& par conſequent ils ſeroient droits : or eſt-il que l'angle CDB, a eſté fait droit, doncques les angles FDB, GDB luy ſeroient eſgaux ; c'eſt à dire, que la partie ſeroit eſgale au tout, doncques il ne ſe peut faire que le centre ſoit hors de la ligne EC, c'eſt doncques le poinct F.

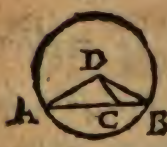
COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition, que ſi vne ligne en couppe vne autre par le milieu, & luy eſt perpendiculaire, elle contiendra le centre du cercle.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Si d'vn poinct de la circonference d'vn cercle, l'on tire iuſques aux autres poincts de cette circonference vne ligne droite ; elle ſera toute dans le cercle.



Que l'on tire du poinct A de la circonference, au poinct B, la ligne AB. Ie dis qu'elle ſera toute dans le cercle : car ſi l'on doute par exemple ſi le poinct C de cette ligne eſt dans le cercle : tirez du centre D les lignes AD, BD, CD.

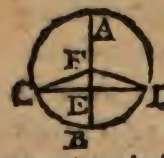
Demonſtration. Au triangle ADB, les coſtez AD, DB ſont eſgaux ; doncques (*par la* 5. du 1.) les angles A & B, ſont eſgaux ; or (*par la* 16. *du* 1.) l'angle externe ACB eſt plus grand que l'angle

A, docques il eſt plus grand que B, & enſuite (*par la* 19. *du* 1.) le coſté DB ſera plus grand que DC, puis qu'il eſt oppoſé à vn plus grand angle : c'eſt pourquoy la circonference ne ſe peut rencontrer entre D & C, ainſi le poinct G eſt dans le cercle, le meſme ſe peut prouuer de tous les autres poincts de la ligne AB.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Si le diametre couppe par le milieu vne ligne, qui ne paſſe pas par le centre, il ſera perpendiculaire à cette ligne, & s'il eſt perpendiculaire, il la couppera par le milieu.



Le diametre AB couppe par le milieu la ligne CD, qui ne paſſe point par le centre : je dis que AB eſt perpendiculaire à CD, c'eſt à dire que les

angles FED, FEC ſont eſgaux pour le voir, tirez du centre F les lignes FC, FD.

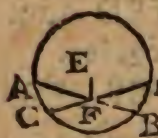
Demonſtration, Les triangles FFD, FEC ont tous les coſtez eſgaux, EF eſt commun FC, FD ſont eſgaux (*par la definition du cercle*) EC, ED ſont auſſi eſgaux parce qu'on ſuppoſe que la ligne CD, eſt diuiſée par le milieu : doncques (*par la* 8. *du* 1.) ces triangles ſont égaux entierement, & les angles FED, FEC ſont eſgaux & droits, & reciproquement ie dis que ſi les angles FEC, FED ſont égaux, les lignes CE, ED ſont égales.

Demonſtration. Les lignes GF, FD, eſtant eſgales (*par la definition du cercle*) les angles C & D, ſont égaux (*par la* 5. *du* 1.) doncques aux triangles FEC, FED, il y a deux angles égaux ce ſont C & D, FED, FEC ; de meſme que les coſtez FC, FD, ainſi (*par la* 21. *du* 1.) ils ſeront eſgaux en tout de meſme que les coſtez CE, ED.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Si deux lignes ſe couppent dans le cercle, en vn autre poinct que le centre, elles ne ſe coupperont pas par le milieu l'vne l'autre.



Si ces deux lignes AB, & CD, ſe couppent au poinct F qui n'eſt pas le centre du cercle, ie dis qu'elles ne ſe couppent pas par le milieu l'vne l'autre. Premierement ſi l'vne paſſoit par le centre, il eſt clair qu'elle ne ſeroit pas couppée par le milieu au poinct F que l'on a ſuppoſé n'eſtre pas le centre. Que ſi ny l'vne ny l'autre ne paſſent pas par le centre, du centre E tirez la ligne EF.

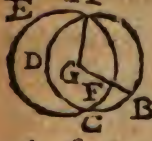
Demonſtration. Si la ligne AB eſt couppée par le milieu, la ligne EF, luy ſeroit perpendiculaire (*par la* 3.) & les

angle AFE, EFB seroient droits : si la ligne CD est aussi couppée par le milieu, les angles EFC, EFB seroient aussi droits donc les angles EFA, EFC seroient droits, ce qui est absorde, puisque l'vn est vne partie de l'autre.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Deux cercles qui se couppent n'ont pas le mesme centre.



Les deux cercles ABCD, AFCE, se couppent au poinct A ; ie dis qu'ils ne peuuent auoir le mesme centre : car si cela se peut faire suppoſons que le poinct G soit le centre d'où vous tirerez les lignes GB, AG.

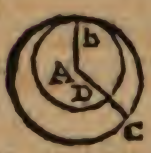
Demonstration. Les lignes GA, & GB tirées du centre G, à la circonference du cercle ABCD, sont égales (*par la definition du cercle*) les lignes GA, & GF,

ſeroient encore égales ſi G eſtoit le centre du cercle AFCE ; ainſi les lignes GB, GF ſeroient eſgales ; ce qui ne ſe peut faire, celle-cy eſtant vne partie de celle-là : doncques ny le poinct G, ny aucune autre ne peut eſtre le centre des deux cercles.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Deux cercles qui ſe touchent interieurement n'ont pas le meſme centre.



Pour voir ſi le poinct A, peut eſtre le centre des deux cercles, qui ſe couppẽt interieurement, tirez de ce poinct les lignes AB, AC.

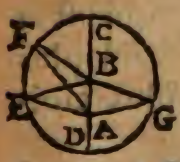
Demonſtration. Si A eſtoit le centre des deux cercles, les lignes AC, AD ſeroient eſgales à AB (*par la definition du cercle*) & conſequemment elles ſeroient eſgales entre elles, ce qui ne ſe peut

peut faire, l'vne eſtant vne partie de l'autre.

PROPOSITION VII.

Si d'vn poinct pris dans vn cercle, & qui ne ſoit pas le centre, on tire pluſieurs lignes vers la circonference.

1 *La plus grande eſt celle qui paſſe par le centre.*
2 *Le reſte de la meſme ligne, ſera la plus petite.*
3 *La plus voiſine de celle qui paſſe par le centre, ſera la plus grande entre les autres.*
4 *On n'en peut tirer que deux d'égales.*



Ie veux que du poinct A qui n'eſt pas le centre du cercle l'on tire pluſieurs lignes vers la circonference, ces lignes ſeront AC, AF, AE, AD; & que AC

paſſe par le centre B; je dis premierement que AC eſt la plus grande de toutes. Pour le voir, tirez du centre B les lignes BF, BE, BG.

Demonſtration. Les deux coſtez AB, BF du triangle ABF, ſont plus grands que AF : (*par la* 20. *du* 1.) or les lignes BC, & BF eſtant égales (*par la definition du cercle*) ſi vous y adiouſtez AB ; la ligne AC, ſera égale aux lignes AB, & BF, doncques elle ſera plus grande que AF.

Ie dis ſecondement, que AD eſt la plus petite, par exemple plus petite que AE.

Demonſtration. Au triangle ABE, les coſtez EA, AB ſont plus grands que BE, (*par la* 20. *du* 1.) or la ligne BD eſt égale à BE, doncques EA, & AB ſont plus grands que BD ; oſtez ce qu'ils ont de commun qui eſt AB ; EA ſera plus grande que AD.

Ie dis en troiſiéme lieu AF, qui eſt la plus proche du diametre AC, eſt plus grande que AE ; qui en eſt plus éloignée.

Les triangles ABF, ABE, ont égaux

les coſtez AF, AE, (*par la definition du cercle*) le coſté AB & commun, l'angle ABF eſt plus grand que l'angle ABE: doncques (*par la* 24. *du* 1.) la baſe BF, eſt plus grande que la baſe BE.

Ie dis en quatriéme lieu qu'on ne peut tirer du poinct A que deux lignes qui ſoient égales. Pour le prouuer faites l'angle ABG, égal à l'angle ABE, & tirez la ligne AG.

Demonſtration. Dans les triangles ABE, ABG, les coſtez BE, BG ſont égaux, le coſté AB eſt commun, & les angles ABE, ABG ſont égaux; doncques (*par la* 4. *du* 1.) les baſes AE, AG ſont égales, & on ne peut tirer aucune autre ligne égale à la ligne AE, parce que ou elle s'approcheroit plus de AC que AE, ou que AG, ainſi elle ſeroit plus grande, ou elle s'en écarteroit plus, & pour lors elle ſeroit plus petite.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

Si d'vn poinct hors du cercle l'on tire pluſieurs lignes à la circonference du cercle.

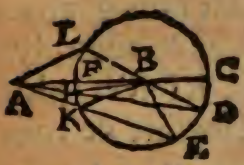
1 *De celles qui tombent ſur la circonference concaue la plus grande eſt celle, qui paſſe par le centre.*

2 *Entre les autres celle-là eſt la plus grande qui eſt la plus proche du diametre.*

3 *De celles qui tombent ſur la circonference conuexe ; celle-là eſt la moindre, qui eſtant eſtenduë iuſques dans le cercle paſſe par le centre.*

4 *Celle qui eſt la plus proche de la moindre, eſt plus petite que la plus éloignée.*

5 *On n'en peut faire que deux égales, ſoit qu'on les tire à la circonference conuexe, ſoit qu'on les eſtende iuſques à la concaue.*



Du poinct A pris hors du celcle tirez plusieurs ligne vers la circonference: je dis premierement que de celles qui tombẽt dans la circonference concaue ABC, qui passe par le centre, est la plus grande: pour le voir, tirez les lignes BD, BE, BK, BI BL.

Demonstration. Au triangle ABD, les costez AB, & BD, sont plus grands que AD, (*par la* 20. *du* 1.) or les lignes BC, & BD estant esgales, AC est aussi grande que AB, & BD; donc Ac est plus grande que AB.

Ie dis en second lieu que AD est plus grande que AE.

Demonstration. Aux triangles ABE, ABD, les costez BE, & BD sont égaux, & le costé AB est commun l'angle ABD est plus grand que ne l'est, ABE, doncques (*par la* 24. *du* 1.) la base AD, sera plus grande que AE.

Ie dis en troisiéme lieu, que des lignes qui tombent sur la circonference conuexe; AF, est la plus petite.

Demonstration. Au triangle AIB les

deux coſtez AI, & IB ſont plus grands que AB, (*par la* 20. *du* 1,) oſtez les lignes eſgales BF, & BI, AI ſera plus grande que AF : ie dis le meſme de toutes les autres.

En quatriéme lieu, ie dis que la ligne AI la plus voiſine de AF, eſt plus petite que AK.

Demonſtration. Les coſtez AK; KB, ſont plus grands, que les coſtez AI, & IB (*par la* 21. *du* 1.) oſtés les lignes égales BI, BK, il s'en ſuiura que AK eſt plus grande que AI.

Ie dis enfin qu'on n'en peut tirer que deux égales, pour le voir faites l'angle ABL égal à l'angle ABK, & tirez la ligne AL.

Demonſtration. Aux triangles ABL ABK, les coſtez BK, BL ſont eſgaux, AB eſt commun, doncques (*par la* 4. *du* 1.) les baſes AK, AL ſont égales, & on ne peuſt tirer aucune autre ligne qui ne ſoit, ou plus proche ou plus eſloignée, de la ligne AF, & par conſequent qui ne ſoit ou plus grande, ou plus petite.

PROPOSITION IX.

Theoreme.

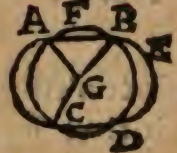
Si d'vn poinct pris dans vn cercle, on tire à la circonference trois lignes esgales, ce poinct sera le centre.

Demonstration, Si ce poinct n'estoit pas le centre, on ne pourroit tirer que deux lignes égales (*par la* 7.) mais on suppose qu'on en tire trois ; doncques le poinct d'où elles sont tirées est le centre.

PROPOSITION X.

Theoreme.

Deux cercles ne ſe peuuent coupper en plus de deux poincts.



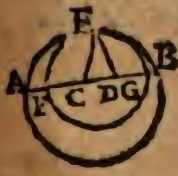
S'il ſe pouuoit faire que deux cercles ſe couppaſſent en trois poincts A, B, C ayant trouué le centre G, du cercle AFBC, tirez trois lignes AG, BG CG.

Demonſtration. Les trois lignes AG, BG, CG, (*par la definition du cercle*) ſont égales : or ces trois lignes ſont tirées à la circonference du cercle ABEC, donc (*par la 9.*) le poinct G ſera ſon centre : d'où il ſuiuroit que deux cercles qui ſe couppent auroient vn meſme centre (*contre la propoſition 5.*

PROPOSITION XI.

Theoreme.

Si vn cercle en touche vn autre au dedans ; la ligne tirée par leur centre, tombe au poinct où ils se touchent.



S'il se pouuoit faire que la ligne qui passe par les deux centres n'abboutit pas au poinct E où les cercles se couppent ; supposons que C soit le centre du petit cercle, D du grand par lesquels passe la ligne AB, & pourtant que le poinct, où ils se touchent soit E ; tirez les lignes CE, DE.

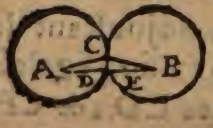
Demonstration. Les lignes CF, CE tirées du centre C, à la circonference du petit cercle sont esgales, adjoustant la commune CB, la ligne DF, sera égale à CD, & à CE : or les lignes CD, & CE,

ſont plus grandes que DE ; doncques DF eſt plus grande que DE, à plus forte raiſon DA ſera plus grande que DE : d'autre part, puiſque D eſt le centre du grand cercle, les lignes DA, & DE doiuent eſtre égales, ainſi DA qui eſt plus grande que DE luy ſeroit encore égale, ce qui eſt abſurde, doncques il faut que la ligne qui couppe le centre des cercles tombe au poinct, où ils ſe touchent.

PROPOSITION XII.

Theoreme.

Si deux cercles ſe touchent par le dehors, la ligne qui paſſe par les centres, paſſe auſſi par le poinct, où ils ſe touchent.



S'il ſe pouuoit faire autrement, tirez la ligne AB qui ne paſſe pas par le poinct C, où les cercles

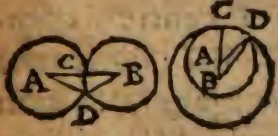
ſe touchent : tirez les lignes AC, BC.

Demonſtration. Dans le triangle ABC, le coſté AB, ſeroit plus grand que AC, BC, parce que A eſtant centre, AD, AC, ſeroient égales, comme auſſi BC BE ; ce qui ſeroit (*contre la* 20. *du* 1.)

PROPOSITION XIII.

Theoreme.

Deux cercles ſe touchent ſeulement en vn poinct.



Premierement ſi deux cercles ſe touchent par le dedans : je dis qu'ils ſe touchent ſeulement en vn poinct, & non pas en vn arc tout entier : pour le voir, tirez par leurs centres A, & B la ligne BA, qui aboutiſſe au poinct C, où ils ſe touchent, ſi l'on aſſeure qu'ils ſe touchent encore au poinct D, tirez les lignes AD, BD.

Demonſtration. Les lignes AD, AC

tirées du meſme centre A ſont égales, & adjouſtant la commune AB, les lignes AD, & AB, ſont égales à la ligne BC: or eſt-il que B eſtant centre du grand cercle; BC, BD ſont égales: donc AB, & BD, ſeroient égales à BD, ce qui eſt abſurde & (*contre la propoſition* 20. *du* 1.)

Secondement, ſi deux cercles ſe touchent par le dehors, tirez la AB, par les centres A, & B; elle paſſera par le poinct C, où les cercles ſe touchent, ſi l'on aſſeure qu'ils ſe touchent encore au poinct D, tirez les lignes AD, DB.

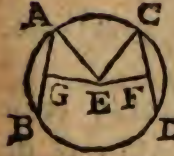
Demonſtration. Les lignes AC, AD ſont égales, puiſque A eſt centre, comme auſſi les lignes BC, BD: doncques les coſtez AD, BD ſont égaux, & non pas plus grands que le coſté AC, (*contre la propoſition* 20. *du* 1.)

PROPO

PROPOSITION XIV.

Theoreme.

Dans vn cercle les lignes eſgales ſont eſgalement éloignées du centre ; & reciproquement celles qui ſont également éloignées ſont eſgales.



Tirez les lignes AB , & CD, eſgales, & du centre E vers elles vous tirerez deux perpendiculaires EF , EG, ie dis que EF , EG ſont eſgales. Pour le voir , tirez encore les lignes EA, EC.

Demonſtration. Les lignes perpendiculaires EF,EG , (*par la* 3.) diuiſent par le milieu les lignes AB , & CD ; doncques les lignes AG, & CF, ſeront égales: or les angles G , & F ſont droits ; doncques (*par la* 47. *du* 1.) le quarré de AE, eſt eſgal aux quarrez de AG , & de GE ;

& le quarré de CE, eſt égal aux quarrez de EF, & de FC ; les quarrez de AE, & de EC ſont égaux, puiſque les lignes AE, & EC tirées du centre ſont égales, doncques les quarrez de AG, & de GE, ſont égaux aux quarrez de EF, FC ; oſtez les quarrez égaux ; des lignes égales AG, & CF ; il reſte que les quarrez de GE, & de EF, ſont égaux, & conſequemment les lignes égales.

En ſecond lieu, ſi les lignes AB, & CD, ſont également éloignées c'eſt à dire, ſi les perpendiculaires EF, & GE, ſont égales, ie dis que les lignes AB, & CD, ſont égales.

Demonſtration. Ie monſtreray tout de meſme que les quarrez de AG, & de GE, ſont égaux aux quarrez de EF, & de FC ; doncques ayant oſté les quarrez de GE, & de EF, qui ſont ſont égaux, puiſque les diſtances EF, & GE, ſont ſuppoſées égales, il reſte que les quarrez de AG, & de DF ſont égaux : & enſuite que les lignes AG & CF, ſont égales ; leſquelles eſtant les moitiés de AB, & de CD (*par la* 3.) les lignes AB, & CD ſeront égales.

PROPOSITION XV.

Theoreme.

De toutes les lignes paralleles tirées dans vn cercle la plus grande eſt le diametre : celle-là entre les autres eſt la plus grande, qui eſt la plus proche du centre.

Ie dis premierement que le diametre AB, eſt la plus grande des lignes que l'on peuſt tirer dans vn cercle, & pour voir que ce peut eſtre vne autre ligne par exemple CD, tirez du centre E, les lignes EC, ED.

Demonſtration. Dans le triangle CED, les deux coſtez ED, & CE, ſont plus grands que le troiſiéme CD ; & le diametre AB eſtant eſgal aux coſtez ED, & CE, ſera auſſi plus grand que CD.

Secondement, faites la ligne GI. plus

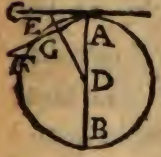
diſtante du centre E, que CD, c'eſt a dire tirant la ligne EF ; EH, perpendiculaire aux lignes CD, GI, que GH ſoit plus grande que EF ; ie dis que CD, eſt plus grande que GI, pour le voir coupez EK égale à EF, & par le poinct K, tirez LM, perpendiculaire à EK, puis tirez les lignes EL, EM, EG, GI.

Demonſtration. Puiſque les lignes CD, & LM ſont également éloignées du centre, les lignes EK & EF eſtant égales, elles ſeront égales (*par la* 14.) or dans les triangles LEM, GEI, les coſtez LE, GE ; EM, EI, eſtant égaux ; & l'angle LEM eſtant plus grand que GEI, la baſe LM ſera plus grande que la baſe GI (*par la* 24. *du* 1.) donc CD eſt plus grande que GI.

PROPOSITION XVI.

Theoreme.

La perpendiculaire tirée à l'extremité du diametre, eſt toute hors du cercle, & le touche, & l'on ne peut tirer aucune ligne, au poinct, où elle le touche entre elle, & la circonference du cercle, qui ne le couppe.



Tirez par l'extremité du diametre AB, la perpendiculaire CA, ie dis en premier lieu que la ligne AC, eſt toute hors du cercle, car ſi vous doubtez ſi quelque poinct de cette ligne E par exemple eſt dans le cercle ou s'il en eſt dehors, tirez la ligne DE.

Demonſtration. Dans le triangle EAD, l'angle A eſtant droit, l'angle AED ſera aigu (*par le 2. corol. de la 32. du 1.*) ainſi

(*par la* 19. *du* 1.) la ligne ED opposée au plus grand angle, eſt plus grande que DA; & enſuite paſſe au delà de la circonference; c'eſt à dire, que le poinct E, eſt hors du cercle, on en peut dire de meſme, de tout autre poinct de la meſme ligne.

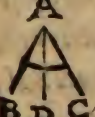
Ie dis en ſecond lieu, qu'on ne peut tirer aucune ligne par deſſous la ligne CA, (comme ſeroit FA) qui ne couppe le cercle: car puiſque l'angle DAF eſt aiſgu, la perpendiculaire que l'on peut tirer à FA, tombera du coſté de F, que ce ſoit la ligne DG.

Demonſtration. L'angle G, eſtant droict, & l'angle DAG aiſgu, le coſté AD, ſera plus grand que ADG, (*par la* 19. *du* 1.) doncques le poinct G eſt dans le cercle, & la ligne FA couppe le cercle.

Les autres conſequences que l'on tire de cette propoſition; ſont pour l'ordinaire fauſſes, comme celle-cy, que l'angle de contingence; c'eſt à dire, celuy qui eſt compris entre la tangente CA, & la circonference du cercle, eſt plus petit, qu'aucun

angle rectiligne, tant petit soit-il: car quoyque l'on prenne l'angle CAF, tousiours plus petit, il semblera que la circonference du cercle, comprenne vn angle plus aigu, auec la tangente CA; ces façons d'argamenter qui sont plus Philosophiques, que Mathematiques, sont Sophistiques, comme remarque tres-bien le P. Iacques, parce qu'elles parlent d'vn angle, comme d'vn espece de quantité, quoy que ce n'en soit qu'vne proprieté; c'est à dire, l'inclination de deux lignes, laquelle inclination, encore qu'on accourcisse, les lignes demeurent cependant les mesmes.

Il faut donc noter que quand nous attribuons certaines denominations aux angles, lesquelles ne conuiennent qu'à la quantité, comme quand nous disons qu'vn angle est plus grand, plus petit, double, triple, & qu'on la diuise en deux ou trois parties.



Il faut dire que nous ne parlons pas tant des angles pris en eux-mesmes, que des arcs qui leur sont opposez: en ce sens tirez l'angle BAC, que nous voulons diuiser par le mi-

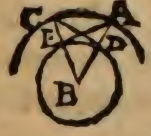
lieu, tirant la ligne AD : nous ne voulons pas que cette inclination BAC soit diuisée, mais cela signifie que quelque arc de cercle que nous tirerons du poinct A, comme centre, il sera diuisé également, par la ligne AD, & c'est en ce sens qu'il faut entendre ce qu'on demonstre de la grandeur des angles : doncques la mesure des angles de contingence ne peut estre la mesme, que de l'angle rectiligne, puisque il n'en à poinct, l'angle de contingence, ne peut estre comparé auec l'angle rectiligne : & il n'y a aucune proportion ou raison de l'vn à l'autre eu égard mesme à la definition ordinaire de la raison, cõme nous ne comparons iamais vne ligne auec vne superficie, ou auec vn corps solide : en effet, si dans la figure de la proposition, l'on descriuoit plusieurs cercles concentriques du poinct A comme centre : on trouueroit que des arcs compris entre la tangente, & la circonference, quelques-vns seroient plus petits, quelques autres plus grands que les arcs interceptez entre la tangente, & la ligne FA. Ainsi l'on ne peut conclurre absolument,

que l'angle de contingence eſt plus petit, que l'ãgle rectiligne FAC, puiſque ſa meſure eſt quelquefois plus grande, quelquefois plus petite, que celle de l'angle rectiligne : ce que i'ay voulu remarquer, de peur qu'on ne méle nos demonſtrations auec les queſtions Philoſophiques, & auec la diuiſibilité des parties : auec laquelle elles n'ont rien de commun, pourueu qu'on entende le poinct, & la ligne de la façon, que ie l'ay expliqué.

PROPOSITION XVII.

Probleme.

La maniere pour d'vn poinct donné, tirer vne ligne qui touche vn cercle.



Que l'on aſſigne le poinct A, d'où il faille tirer vne tangente au cercle ED : tirez la ligne AB, au centre B : Et du meſme centre B, faites vn cercle à l'in-

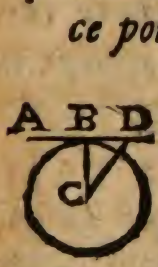
terualle BA : tirez par le poinct D, la tangente ou perpendiculaire DC, qui couppe le cercle AC, au poinct C. Faites les lignes CB ; & AE, ie que cette derniere touche le cercle au poinct E, c'eſt à dire que l'angle BEA eſt droict.

Demonſtration. Les triangles, AEB, & CBD ont eſgaux les coſtez BE, BD; BC, BA ; le coſté B qui eſt cõmun eſt encore égal aux autres : doncques ces triangles ſeront égaux en tout ſens (*par la 4. du 1.*) & les angles BDC, & BEA (oppoſez aux coſtez eſgaux BC, & BA,) ſeront eſgaux : or l'angle BDC, eſt droit; doncques l'angle BEA eſt droit, & (*par la 16.*) EA touche le cercle au poinct E.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

Si vne ligne touche le cercle en vn poinct, la ligne tirée du centre à ce poinct ſera perpendculaire.



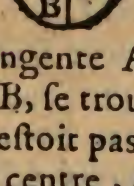
Faites que la ligne AB touche le cercle au poinct B : je dis que la ligne CB eſt perpendiculaire à la ligne AB : car ſi elle ne l'eſtoit pas, tirez du centre C vne autre ligne vers le poinct D.

Demonſtration. Puiſque l'angle CDB eſt droict ; il ſera plus grand que l'angle CBD : (*par le* 2. *cor. de la* 32. *du* 1.) doncques (*par la* 19. *du* 1.) le coſté CB, ſeroit plus grand que le coſté DC, & le poinct D ſeroit dans le cercle : Ce qui ſeroit contre la defin. de la tangente.

PROPOSITION XIX.

Theoreme.

Si la ligne qui eſt perpendiculaire à l'égal de la tangente, eſt tirée du point, où la tangente touche le cercle, elle paſſera par le centre du cercle.



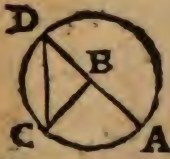
Faites que la ligne AB, tirée du poinct A, où la tangente AC touche le cercle, ſoit perpendiculaire à cette tangente AC: je dis que dans la ligne AB, ſe trouue le centre du cercle: car s'il n'eſtoit pas dans AB, ſuppoſez que D ſoit le centre, & tirez la ligne DA.

Demonſtr. (*par la* 18.) la ligne DA ſera perpendiculaire à la ligne AC; doncques l'angle DAC eſt vn angle droit: or l'angle BAC, eſt ſuppoſé droict; doncques DAC, & BAC ſont angles droicts, & égaux,

eſgaux, ce qui ne ſe peut faire, l'vn eſtant partie de d'autre.

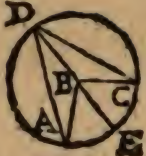
PROPOSITION XX.

L'angle du centre eſt double de celuy de la circonference, s'ils ont pour baſe le meſme arc.



Les angles ABC, ADC, ont pour baſe le meſme arc AC; je dis que l'angle ABC, eſt double de l'angle ADC. Cette propoſition doit eſtre étudiée differemment, parce que les lignes peuuent eſtre tirées en trois façons differentes : la premiere eſt, quand les lignes AB, & AD ſont la meſme ligne.

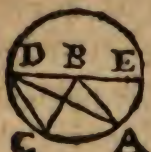
Demonſtration. Au triangle BDC, l'angle externe ABC, (*par la 32. du 1.*) eſt égal aux deux internes oppoſez D & C ; ceux-cy ſont égaux, (*par la 5. du 1.*) puiſque les lignes BC, & BD ſont égales ; ainſi l'angle ABC ſera double de ADC.



En ſecond lieu, ſi les côtez AB & AD ne ſont pas vne meſme ligne : tirez la ligne DBE.

Demonſtration. Par la precedente demonſtration, il conſte que l'angle ABE, eſt double de l'angle ADB, de meſme EBC, eſt double de BDC : doncques l'angle total ABC eſt double du total ADC.

Troiſiémement, ſi les lignes ſe coupent, tirez la ligne DBE, par le centre E.

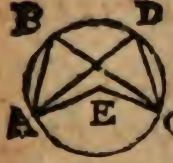


Par la premiere demonſtration, l'angle total EBC, eſt double du total CDE; de meſme l'angle EB, eſt double de l'angle ADE; oſtez-les, des premiers, & l'angle ABC, reſtera double de ADC.

PROPOSITION XXI.

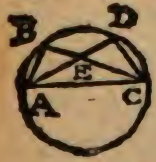
Theoreme.

Les angles ſont eſgaux, qui ſont dans le meſme ſegment d'vn cercle, de meſme que ceux qui ont pour baſe le meſme arc.



Les deux angles ABC, ADC, ſont dans le meſme ſegment ABCD, qui ſurpaſſe le demi-cercle : je dis qu'ils ſont eſgaux : Pour le voir, tirez au centre du cercle E, les lignes AE, EC.

Demonſtration. L'angle AEC, eſt double des angles B, & D (*par la XX.*) doncques les angles B, & D ſont égaux.



Secondement, les Angles ABC, ADC, peuuent eſtre dans le méme ſegment ABDC, qui ne ſera pas plus grand qu'vn demi-cercle.

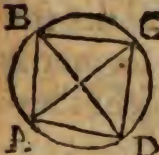
Demonſtration Tous les angles du triangle ABE, pris enſemble, ſont égaux à tous les angles du triangle DEC : les angles AEB & DEC, qui ſont oppoſez, ſont égaux (*par la* 15. *du* 1.) les angles BED, & BCD qui ſont dans le ſegment, BACD plus grand qu'vn demi-cercle ſont égaux (*par la premiere partie de celle-cy*) doncques les angles ABC ; & ADC ſont égaux.

Il faut remarquer que les angles ABC, & ADC qui ſont dans les meſme ſegment ABDC; ont pour baſe le meſme arc AC: c'eſt pourquoy il eſt clair que les angles dans vn cercle qui ont pour baſe le meſme arc, ſont égaux.

PROPOSITION XXII.

Theoreme.

Aux figures qui ont quatre costez, & sont tracées au dedans d'vn cercle ; les angles opposez, sont égaux à deux droicts.



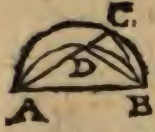
La figure ABCD, est tracée dans le cercle : je dis que les angles A & C, qui sont opposez, sont égaux à deux droicts. Pour prouuer tirez les lignes AC, BD.

Demonstration. Tous les angles du triangle ABD sont égaux à deux droicts (*par la* 31. *du* 1.) doncques si au lieu de l'angle ABD, vous mettez l'angle ACD qui luy est égal (*par la* 21.) & si au lieu de ADB vous mettez ACD qui luy est égal (*par la mesme*) l'angle A & l'angle C seront égaux à deux droicts.

PROPOSITION XXIII.

Theoreme.

On ne peut décrire ſur la meſme ligne, & du meſme coſté, deux ſegments de cercle, qui ſoient ſemblables, & égaux.



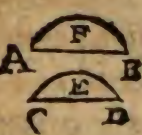
Si l'on pouuoit décrire ſur la ligne AB, deux ſegments de cercle, qui fuſſent ſemblables; c'eſt à dire qui continſent des angles égaux: je dis qu'ils tomberoient l'vn ſur l'autre, & ſeroient enſuite entierement égaux: car s'ils n'étoient pas égaux, ſuppoſons que ce ſoient les ſegments ACB, ADB; pour demonſtrer que les angles ne ſont pas égaux: tirez la ligne ADC, qui couppe les deux ſegments: puis tirez les lignes BC, BD.

Demonſtration. L'angle externe ADB,

eſt plus grand que l'interne DCB, (*par la* 21. *du* 1.) doncques ces deux ſegments ne contiennent pas des angles égaux; c'eſt à dire, qu'ils ne ſont pas ſemblables, & par vne conſequence contraire, s'ils ſont ſemblables, ils ſeront égaux.

PROPOSITION XXIV.

Les ſegments de cercles, qui ſont ſemblables, & ſont décrits ſur des lignes eſgales ſont égaux.

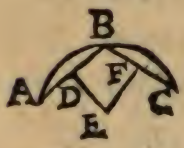


Sur les lignes eſgales AB, & CD, tracés deux ſegments AFB CED, qui ſoient ſemblables; je dis qu'ils ſont égaux.

Demonſtration. Imaginez-vous que la ligne CD, eſt poſée ſur la ligne AB, puis qu'elles ſont égales, elles ne s'excederont point l'vne l'autre. En cette ſuppoſition le ſegment CED, tombera ſur le ſegment AFB, autrement ſur la meſme ligne, on pourroit décrire deux ſegments ſemblables, & inégaux (*ce qui eſt contre la prop.* 23.

PROPOSITION XXV.

Vn arc de cercle eſtant donné : comment l'on peut décrire tout le cercle.



Propoſez-vous l'arc ABC, & qu'il faille acheuer le cercle : prenez trois poincts dãs cét arc qui ſoient A,B,C, tirez les lignes AB, BC ; diuiſez-les par le milieu aux poincts D, & F, puis tirez les perpendiculaires DE, FE, qui ſe rencontrent au poinct E: je dis que le poinct E, eſt le centre du cercle.

Demonſtration. Puiſque la ligne BA, eſt diuiſée par le milieu au poinct D, & que vous auez tiré la perpendiculaire DE, le centre ſera dans la ligne AE, (*par le corol. du* 1.) Il ſera auſſi dans FE, (*par la meſme*) doncques il ſera dans le poinct E.

PROPOSITION XXVI.

Aux cercles esgaux, les angles sont esgaux, tant ceux du centre, que ceux de la circonference s'ils ont pour bases, des arcs égaux.

Supposez que les angles A & B soient égaux, de mesme que les cercles EFH, CDG: je dis que les arcs EF & CD, sont égaux: il semble que cette proposition est la simple definition des angles égaux : cependant on la peut ainsi prouuer.

Demonstration. Aux triangles BEF, & ACD, les costez BE, BF; AC, AD sont égaux; de mesme que les angles A & B; donc (*par la* 4. *du* 1.) les bases CD, & EF sont égales : ainsi les angles H, & G, estant la moitié des angles A & B, seront égaux : doncques les segments CGD, EHF sont semblables, & estant sur des lignes égales CD, & EF, ils seront

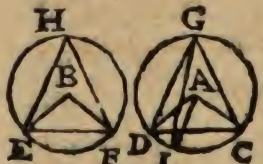
égaux (*par la 26.*) c'eſt pourquoy ſi des cercles eſgaux, vous oſtez des ſegments CGD, EHF égaux: les arcs CD, EF ſeront eſgaux.

Remarquez que les angles G, & H, qui ſont en la circonference, ont pour baſe des arcs eſgaux CD, EF.

PROPOSITION XXVII.

Theoreme.

Aux cercles eſgaux, les angles tant au centre qu'à la peripherie qui ont pour baſes, des arcs eſgaux, ſont eſgaux.



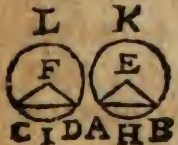
Faites que les angles A, & B, ayent pour baſe des arcs eſgaux EF, & DC; je dis que ces angles ſont eſgaux: car s'ils ne l'eſtoient pas, ſuppoſez que l'angle A ſoit plus grand, & que l'angle CAI ſoit eſgal à l'angle B.

Demonſtration. Puiſque les angles B, & CAI ſont eſgaux, les arcs EF, CI ſeront eſgaux (*par la* 26.) Il eſt donc faux que les angles EF, & DC fuſſent égaux. De plus, ſi les arcs EF, & DC ſont égaux; je dis que les angles G, & H ſont égaux. car s'ils ne ſont pas eſgaux : ſuppoſez que G ſoit plus grand que H, & que l'angle IGC ſoit eſgal à l'angle H : il ſuiuroit que les angles EF, & IC ſeroient égaux contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XXVIII.

Theoreme.

Aux cercles eſgaux, les lignes ſont eſgales, qui eſtant oſtées laiſſent des arcs eſgaux.



Les lignes AB, & CD, ſont eſgales, & tirées dans des cercles égaux : je dis que les arcs AHB, & CIB ſont eſgaux, de meſme

que les angles AKB, CLD. Pour le conceuoir, tirez aux centres E & F, les lignes AE, BE, GF, DF.

Demonſtration. Aux triangles AEB, CDF, les coſtez AE, EB; CF, ED ſont eſgaux, puiſque les cercles ſont eſgaux, & que les baſes CD, & AB ſont eſgales; doncques (*par la* 8. *du* 1.) les angles E, & F ſont égaux; & (*par la* 28.) les arcs AHB, & CID ſont eſgaux, qui eſtant oſtez des cercles eſgaux, laiſſent les arcs eſgaux AKB, CLD.

PROPOSITION XXIX.

Aux cercles eſgaux, les lignes eſgales, ſont opposées à des arcs égaux.

Ie dis qu'aux cerles eſgaux, ſi les arcs AHB, CID, ſont eſgaux, les lignes AB, CD ſont eſgales.

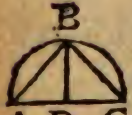
Demonſtration. Puiſque les arcs AHB, CID ſont eſgaux, les angles E, & F ſeront eſgaux (*par la* 27.) & dans les triangles CFD, AEB, les coſtez AE, CF; EB, FD eſtant eſgaux à cauſe de l'égalité des cercles,

cercles, de meſme que les angles E, & F, les baſes AB, & CD, ſeront eſgales (*par la* 41. *du* 1.)

PROPOSITION XXX.

Probleme.

Le moyen de diuiſer vn arc par le milieu.



Que l'on ſe propoſe la circonference ABC, à diuiſer par le milieu. Pour cela, tirez la ligne AC: que vous diuiſerez par le milieu au poinct D, & tirerez par D la perpendiculaire DB; je dis que l'arc ABC, eſt diuiſé par le milieu, & que le milieu eſt le poinct B: pour le demonſtrer tirez les lignes AB, & BC.

Demonſtration. Les triangles ADB, & CDB, ont les coſtez, AD, D[illegible] égaux (puiſque la ligne AC a eſté diuiſée par le milieu) le coſté AD eſt commun, & les angles ADB, & CDB, eſtant droicts, ſont

eſgaux : donques (*par la* 4. *du* 1.) les baſes AB, & BC ſont eſgales & (*par la* 28.) les arcs BB, & BC ſont eſgaux.

PROPOSITION XXXI.

Theoreme.

L'angle dans le demi-cercle, eſt droit: il eſt aiſgu dans le ſegment qui ſurpaſſe le demi-cercle: & dans le ſegment moindre que le demi-cercle, il eſt obtus.

Tracez l'angle ABC, dans le demi-cercle : je dis qu'il eſt droict : pour le voir, tirez du centre D, la ligne DB.

Demonſtration. Les coſtez DA, & DB, du triangle ABD eſtant eſgaux (*par la definition du cercle*) les angles DAB, & DBA ſeront eſgaux : ce meſme que les angles DBC, BCB ; doncques l'angle total ABC, eſt eſgal aux deux A & C : &

dans le triangle ABC, les trois angles estant esgaux à deux droicts, (*par la* 32. *du* 1.) l'angle ABC, sera la moitié de deux droicts; c'est à dire, vn angle droict.

Secondement, je dis que l'angle A, qui est dans le segment BAC, surpassant la moitié d'vn cercle, est aisgu; puisque A, & C ne font qu'vn droict.

Troisiesmement, je dis que l'angle E, est obtus; parce que dans la figure de quatre lignes ABEC, l'angle A, & l'angle E opposé valent deux droicts: (*par la* 22.) doncques A estant moindre qu'vn droict; E sera glus grand qu'vn droict.

PROPOSITION XXXII.

Theoreme.

Si vne ligne touche le cercle, & que par le poinct, où elle le touche, l'on tire vne autre ligne qui couppe le cercle: les angles que cette derniere fera auec la tangente ſeront eſgaux, à ceux des ſegments alternes.

LA ligne AC touche le cercle au poinct B; & par le poinct B, l'on a tiré la ligne BE, ou la ligne BD: je dis que l'angle ABD, eſt eſgal à l'angle CED, compris dans le ſegment alterne DEB: & que l'angle CBD eſt eſgal à l'angle E, compris dans le ſegment alterne BFD.

Premierement, la ligne paſſant par le centre, il eſt clair que les ſegments ſont des demi-cercles qui renferment des angles droicts: auſſi les angles CBE, &

ABE ſont-ils droicts : enſuite en ce cas la propoſition ſeroit vraye ; mais ſuppoſons que la ligne BD ne paſſe pas par le centre , je dis que l'angle E compris dans le ſegment BED eſt eſgal à l'angle ABD.

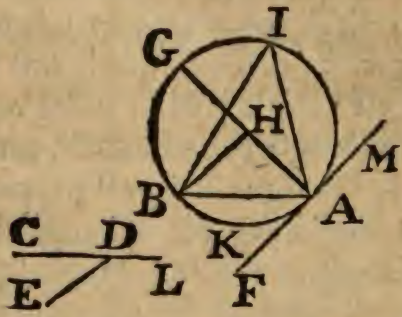
Demonſtr. Les trois angles CBE, EBD, ABD valent deux droicts : (*par la* 13. *du* 1.) or tous les angles BDE , valent auſſi deux droicts, (*par la* 32 *du* 1.) doncques il y a égalité : oſtez ce qu'ils ont de commun qui eſt l'angle EBD , oſtez encore d'vn coſté l'angle droict EBC , puiſque (*par la* 18.) la ligne BE , eſt perpendiculaire , & de l'autre coſté l'angle D, qui eſt auſſi droict , (*par la* 31.) puiſque l'arc BDE eſt vn demi-cercle , ce qui reſte ſera égal ; c'eſt à dire l'angle E , à l'angle ABD.

Ie dis encore , que l'angle F , eſt égal à l'angle CBD : l'angle CBD auec ABD valent deux droicts (*par la* 13. *du* 1.) l'angle E , & l'angle F valent auſſi deux droicts (*par la* 32.) puiſque la figure BEDF eſt quadrilatere : oſtez les angles E, & F qui ſont égaux, reſteront les angles F & CBD égaux.

PROPOSITION XXXIII.

Probleme.

La façon de deſcrire ſur vne ligne donnée vn ſegment de cercle, capable d'vn angle determiné.



Tizez la ligne AB, ſur laquelle il faut décrire vn ſegmẽt de cercle capable de l'angle CDE, faites l'angle BAF eſgal à l'angle CDE, (*par la 23. du 1,*) puis tirez à FA la perpendiculaire AG, faites l'angle ABH, eſgal à l'angle BAH : décriués du poinct H, à l'interualle HA, ou HB ; le cercle ABG : je dis que le ſegment BIA, eſt capable d'vn angle eſgal à l'angle CDE ; c'eſt à dire que l'angle CDE eſt eſgal à l'angle I.

Demonſtration. Puiſque l'angle ABH; eſt eſgal à l'angle BAH, les coſtez HB, HA, ſeront égaux, & le cercle dont le centre ſera H paſſant par A, paſſera par B; or puiſque la ligne FA eſt perpendiculaire, la ligne AG, dans laquelle eſt le centre H, elle ſera tangente (*par la* 16.) & (*par la* 32.) l'angle BAF, qui a eſté fait eſgal à CDE, ſera eſgal à l'angle I.

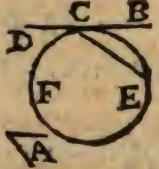
Si l'angle donné eſtoit droict, il faudroit diuiſer la ligne AB par le milieu, & décrire vn cercle: chaque demi-cercle comprend vn angle droit.

Enfin ſi l'angle donné eſtoit obtus, comme KDC, il faudroit faire l'angle MAB eſgal à LDE, & pour le reſte operer de la meſme façon; car l'angle qui ſe feroit dans le ſegment BKA comprendroit vn angle eſgal, à l'angle MAB, & enſuite eſgal à LDE.

PROPOSITION XXXIV.

Probleme.

La façon de retrancher d'vn cercle donné, vn ſegment capable, d'vn angle determiné.



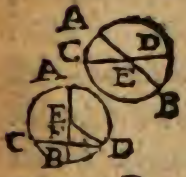
Si l'angle eſtoit droit, il ne faudroit que tirer le diametre, chaque demicercle comprendroit vn angle droit,

Que ſi l'angle donné eſt marqué par A, n'eſt pas droit: tirez la rangente CB, (*par la* 17.) & faites l'angle BCE, eſgal à l'angle A: il eſt clair que l'angle que l'on feroit dans le ſegment CFE, eſt eſgal à l'angle BCE: & enſuite à l'angle A.

PROPOSITION XXXV.

Theoreme.

Si deux lignes se couppent au dedans d'vn cercle : le rectangle compris sous les segments de l'vne est esgal au rectangle compris sous les segments de l'autre.



Considerons cette proposition de toutes les façons dont elle peut estre estudiée. Premierement les deux lignes AB, & CD se peuuent couppper au centre E, puisque les 4. lignes AE, EB CE, ED estant tirées du centre sont égales; il est clair que le rectangle compris sous les segments de l'vne, est esgal au rectangle compris sous les segments de l'autre.

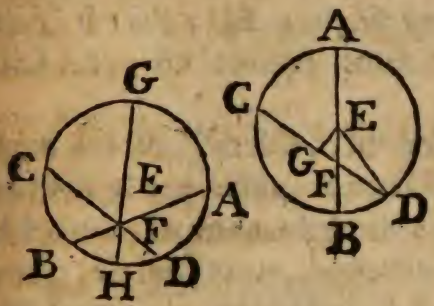
En second lieu, la ligne AB, qui passe par le centre E, diuise par le milieu &

perpendiculairement la ligne CD : (*par la* 3.) Ie dis que le rectangle compris ſous AF, & FB; eſt eſgal au rectangle compris, ſous CF, & FD; c'eſt à dire, puis qu'elles ſont eſgales au quarré de FD.

Demonſtration. (*par la* 5. *du* 2.) puis que la ligne AB, eſt diuiſée par le milieu au poinct E, & inégalement au poinct F, le rectangle compris ſous AF, & FB, auec le quarré de EF, eſt eſgal au quarré de EB, ou de ED qui luy eſt eſgale : or eſt-il que le quarré de ED, (*par la* 47. *du* 1.) eſt eſgal aux quarrez de EF & de FD: doncques les quarrez de EF, & FD; & le rectangle compris ſous AF, & FB, & auec le quarré de EF, ſont égaux: & ôtant le quarré de EF d'vn coſté & d'autre: il reſte que le quarré de FD, eſt eſgal au rectangle compris ſous AF, & ſous FB.

En troiſiéme lieu, ſi la ligne AB paſſe par le centre, & que CD ne ſoit pas couppée eſgalement : je dis pourtant que le rectangle compris ſous les lignes AF, & FB eſt eſgal au rectangle compris ſous les lignes CF, & FD. Pour le prouuer, tirez

la perpendiculaire EG qui (*par la* 3.) diuisera la ligne CD par le milieu.



Demonstrat. (*par la* 5. *du* 2.) la ligne AB, ayant esté diuisée par le milieu au point E, & inesgalement au poinct F, le rectangle compris sous AF, & FB, auec le quarré de EF, est esgal au quarré de EB, ou de ED, qui luy est esgale: de mesme le rectangle compris sous les lignes CF, & FD; auec le quarré de GF, est esgal au quarré de GD; doncques le rectangle compris sous AF, & sous FD, auec le quarré de EF, ou plûtost les quarrez des lignes GF, & EF, qui luy sont esgaux (*par la* 47. *du* 1.) & le quarré de GD; sont esgaux au rectangle compris sous CF, & sous FD; auec les quarrez de GF, & ED, ostez ce qu'ils ont de commun, qui est le quarré de GF; ostez encor d'vn

coſté le quarré de FD, & de l'autre les quarrez de EG & de GD, qui luy ſont eſgaux (*par la* 47. *du* 1.) il reſte que le rectangle compris ſous AF, FB eſt égal au rectangle compris ſour CF, & ſous FD.

En quatriéme lieu, ſi les lignes ſe couppent ſans qu'aucune paſſe par le centre. Ie dis que le rectangle compris ſous AF, & ſous FB, eſt eſgal au rectangle compris ſous CF, & ſous FD. Pour le voir, tirés la ligne FE, qui paſſe par le centre E.

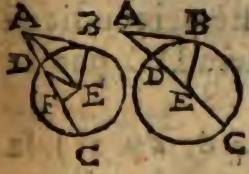
Demonſtration. Ie viens de dire que le rectangle ſous les lignes AF, & FB, eſt eſgal au rectangle compris ſous GF, & ſous FH, je viens encore de prouuer que le rectangle ſoubs CF, & ſous FD eſt auſſi eſgal au rectangle compris ſous GF, & ſous FH, doncques les rectangles ſous AF, & ſous FB, & ſous les lignes CF & FD ſont eſgaux.

PROPO

PROPOSITION XXXVI.

Theoreme.

Si d'vn poinct hors du cercle l'on tire vne tangente, & vne ſecante, le quarré de la tangente ſera eſgal, au rectangle compris ſous toute la ſecante, & ſous la ligne exterieure.



Que l'on tire du poinct A hors du cercle la tangente AB & la ligne AC, qui couppe le cercle; & c'eſt pour cela qu'on l'appelle ſecante; mais il faut qu'elle paſſe par le centre E : Ie dis que le quarré de AB, eſt eſgal au rectangle compris ſous AC, & ſous AD.

Demonſtration. (*par la 6. du 2.*) la ligne DC eſtant diuiſée par le milieu au poinct E, & la ligne AD luy eſtant ad-

joûtée, le rectangle ſous AC, & ſous AD auec le quarré de ED, ou de EB, eſt eſgal au quarré de AE, ou aux quarrez de AB & de BE, qui luy ſont eſgaux (*par la* 47. *du* 1.) puiſque B eſt angle droict (*par la* 18.) doncques le rectangle ſous AC, & ſous AD, auecque le quarré de EB, eſt eſgal aux quarrez de AB, & de BE; oſtez le quarré de EB qui eſt commun à tous deux, & il reſtera que le quarré de AB eſt eſgal au rectangle ſous AC & ſous AD.

En ſecond lieu, ſi la ſecante AC, ne paſſe pas par le centre E: tirez les lignes EB, ED, & la ligne EF perpendiculaire à DC, laquelle diuiſera DC par le milieu au poinct F.

Demonſtration. (*par la* 6. *du* 2.) la ligne DC, eſtant diuiſée par le milieu, & la ligne AD luy eſtant adjoûtée, le rectangle ſous AC, & ſous AD, auecque le quarré de DF eſt eſgal au quarré de AF, adjouſtez le quarré de EF, le rectangle ſous AC, & ſous AD, auec les quarrez de FD, & de EF, ou en leur place auec le quarré de ED, ou de EB qui

leur eſt eſgal (*par la* 47. *du* 1.) ſera égal aux quarrez de AF, & de FE, ou en leur place au quarré de AE, qui leur eſt égal, ou encore aux quarrez de AB, & de BE, qui luy ſont eſgaux (*par la* 47. *du* 1) puis que l'angle B, eſt droict (*par la* 18.) ôtez le quarré de BE qui eſt commun.

Il reſtera que le quarré de AB ſera égal au rectangle ſous AC & ſous AD.

COROLLAIRE. I.

Il ſuit premierement, que ſi on tiroit pluſieurs ſecantes, que tous les rectangles compris ſous ces ſecantes, & ſous les lignes exterieures; ſeroient égaux entre eux: parce qu'ils ſeroient eſgaux au meſme quarré.

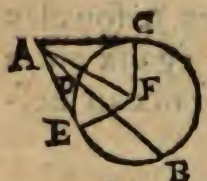
COROLLAIRE II.

Il ſuit encore que ſi du meſme poinct, on tire deux tangentes, l'vne d'vn coſté, l'autre de l'autre, qu'elles ſeront égales; parce que leurs quarrez ſeront égaux.

PROPOSITION XXXVII.

Theoreme.

Si le rectangle compris ſous vne ſecante & ſous la ligne exterieure, eſt eſgal au quarré d'vne ligne qui abboutit contre vn cercle, elle ſera tangente.



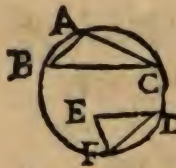
Que du poinct A l'on tire la ſecante AB, & que la ligne AC abboutiſſe à la circonference du cercle : en ſorte que le quarré de AC, ſoit eſgal au rectangle ſous AB, & ſous AD ; je dis que la ligne AC eſt tangente, c'eſt a dire qu'ayant tiré la ligne FG, du centre F, l'angle C eſt droict. Pour le voir, tirez (*par la* 17) la tangente AE, & la ligne FE.

Demonſtration. Puis que la ligne AE, eſt tangente, & la ligne AB ſecante, le

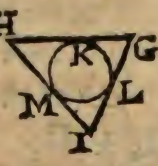
rectangle ſous AB, & ſous AD ſera égal au quarré de AE : or l'on ſuppoſe que le quarré de AC, eſt eſgal au meſme rectangle ; doncques le quarré de AE, & de AC ſont eſgaux, & par conſequent les lignes AC, & AE, ſont égales aux triangles AFC, AFE, tous les coſtez eſtant eſgaux, neceſſairement les angles ſeront égaux, & l'angle E, eſtant droict (*par la* 18.) puiſque AE, eſt tangente, l'angle C, ſera auſſi droict; & (*par la* 16.) la ligne AC ſera tangente.

LIVRE QVATRIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.



1. L'on dit qu'vne figure rectiligne eſt inſcrite dans vn cercle,& que le cercle eſt décrit autour d'elle,quand elle eſt tellement tracée au dedans du cercle, que tous ſes angles ſoient en la circonference du cercle. *Comme le triangle ABC, & non pas le triangle DEE.*



2. Vne figure rectiligne eſt décrite autour d'vn cercle, & le cercle inſcrit dans cette figure ; quand chaque coſté de

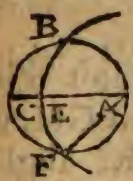
la figure touche le cercle : *Comme le triangle GHI, duquel tous les costez touchent le cercle en K, L, M.*

On adjouſte vne ligne dans vn cercle, quand ſes deux bouts, ſont en la circonference, *Comme la ligne NO, la ligne PR n'eſt pas aiuſtée, parce que le poinct R, n'eſt pas en la circonference du cercle.*

PROPOSITION I.

Probleme.

La façon d'aiouſter dans vn cercle vne ligne moindre que le diametre.



Il fau adjouſter dans le cercle ABG, vne ligne égale à la ligne D couppez du diametre AC, la ligne AE, égale à la ligne D ; & du poinct A, comme du centre, iuſques à l'intervalle AE, décriuez vn cercle, qui coupe le premier au poinct F ; enſuite tirez la ligne AF : je dis que AF, eſt adjuſtée

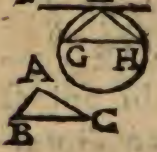
dans le cercle, & eſgale à D.

Demonſtration. AF, & AE, (*par la definition du cercle*) ſont eſgales, AE, & D le ſont auſſi; doncques AF, & D ſont eſgales, & les deux bouts de la premiere ſont dans la circonference du cercle.

PROPOSITION II.

Probleme.

Comment il faut inſcrire dans vn cercle, vn triangle dont les angles ſoient égaux à ceux d'vn triangle donné.



Si l'on ſe propoſoit d'inſcrire dans le cercle EGH, vn triangle qui ayt les angles eſgaux, à ceux du triangle ABC, il faut tirer la tangente FED; & faire l'angle FEG eſgal à l'angle C; & l'angle DEH eſgal à l'angle B, puis la ligne GH eſtant tirce: je dis que

le triangle EGH a les angles égaux à ceux du triangle ABC.

Demonſtration. L'angle H, eſt eſgal (*par la* 32. *du* 3.) à l'angle FEG, & l'angle FEG a eſté fait eſgal à l'angle C, doncques l'angle H, eſt eſgal à l'angle C; ainſi ie monſtre que l'angle G, eſtant eſgal à DEH, l'eſt auſſi à l'angle B: & (*par le* 3. *coroll. de la* 32. *du* 1.) il eſt clair que l'angle GEH, ſera eſgal à l'angle A.

PROPOSITION III.

Probleme.

Comment l'on peut deſcrire autour d'vn cercle vn triangle qui ayt les angles eſgaux à ceux d'vn triangle donné.

Si l'on vouloit deſcrire autour du cercle GHK, vn triangle qui euſt ſes angles à ceux du triangle ABC il

faudroit alonger la ligne du coſté CB, iuſques aux poincts D, & F, & faire l'angle GIH eſgal à l'angle ABD, & l'angle HIK eſgal à l'angle ACF : enſuite il faudra tirer aux poincts G, H, K, trois tangentes LM ; MN ; LN, leſquelles neceſſairement ſe rencontreront : car ſi l'on tiroit la ligne GH, les angles MGH, MHG ſeroient plus petits que les angles IGM, IHM, qui ſont droits, doncques les lignes HM, GM, (*par la* 31. *du* 1.) doiuent ſe rencontrer ; ainſi ie monſtreray que les autres ſe rencontreront. Il ſe formera donques vn triangle LMN, & que ie dis auoir les angles eſgaux, à ceux du triangle ABC.

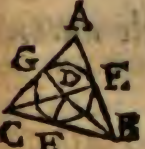
Tous les angles du quadrilatere MGIH, ſont eſgaux à 4. droicts ; parce qu'il ſe peut diuiſer en deux triangles en tirant la ligne MI : or les angles G, & H ſont droits : (*par la* 16. *du* 3.) doncques les angles M & I ſont égaux à deux droits : les angles ABD, ABC ſont encore égaux à 2. droits ; & l'angle GIH a eſté fait eſgal à l'angle ABD, doncques l'angle M, eſt eſgal à l'angle ABC. Ie monſtreray de

meſme façon que l'angle N eſt eſgal à l'angle ACB, & (*par le 3. coroll. de la 32. du 1.*) les angles L, & A ſeront égaux : & le triangle n'aura point d'angle qui ne ſoit eſgal à l'angle donné.

PROPOSITION IV.

Probleme.

La façon d'inſcrire vn cercle dans vn triangle.



Si l'on deſire inſcrire vn cercle, dans le triãgle ABC, diuiſez par le milieu les angles C, & B (*par la 9. du 1.*) & du point D qui eſt le concours des lignes CD, BD, tirez les lignes DF, DG, DE, perpendiculaires à chaque coſté : je dis qu'elles ſont égales, & enſuite que le cercle décrit du poinct D : iuſques à l'interualle DF, paſſant par les poincts E & G touche chaque coſté.

Demonſtration. Aux triangles DEB, DBF, les angles F & E eſtant droicts, &

les angles DBF, DBE estant égaux, l'angle B ayant esté diuisé également, & le costé BD estant commun, les autres côtez seront égaux (*par la* 21. *du* 1.) doncques les lignes DF, & DE sont égales, ainsi ie prouueray que DF, & DG sont aussi égales, & que le cercle passe par E, & par G, & parce que les angles E, F, G, sont droicts (*par la* 16. *du* 3.) les costez AB, BC, & AD, touchent le cercle.

PROPOSITION V.

La façon de descrire vn cercle autour d'vn triangle.

Pour décrire vn cercle autour du triangle ABC, diuisez par le milieu les côtez AB, AC aux poincts E, & D; puis tirés les perpendiculaires FE, FD, qui se rencontreront au poinct F, parce que si l'on tiroit la ligne ED les angles FED, & FDE seroient moindres que deux droicts, du poinct F, iusques

à

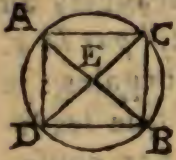
à l'interualle FA décriuez vn cercle : je dis qu'il passera par B & par C, & par consequent que le cercle sera décrit autour du triangle. Pour le voir, tirez les lignes FA, FB, FC : je dois prouuer qu'elles sont esgales.

Demonstration. Aux triangles AFD, DFC ; les lignes AD, DC, sont esgales, la ligne AC a esté diuisée également, la ligne FD est commune, les angles au poinct D sont droicts & égaux, (*par la 4. du 1.*) les bases AF, FC seront égales : je prouueray de la mesme sorte que les lignes AF, FB, sont esgales ; par consequent que le cercle qui sera décrit du poinct F, iusques à l'interualle FA, passera aussi par les poincts B, & C.

PROPOSITION VI.

Probleme.

La façon d'iſncrire vn quarré dans vn cercle.



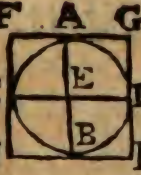
Tirez dans le cercle donné deux diametres, AB, CD perpendiculaires l'vn à l'autre; puis tirez les lignes AD, BD, BC, AC : je dis que la figure ADBC inſcrite dans le cercle, eſt vn quarré.

Demonſtration. Premierement les angles DAC, ACB, CBD, ADB, ſont dans le demi-cercle : donques (*par la* 31. *du* 3.) ils ſont droits. D'ailleurs aux triangles AEC, BEC, les côtez AE, EC, & BE eſtant eſgaux, & les angles AEC, CEB, eſtant droicts & égaux, les baſes AC, & CB ſeront égales (*par la* 4. *du* 1.) ainſi ie prouueray qu'en la figure ACBD tous les coſtez ſont égaux.

PROPOSITION VII.

Probleme.

La façon de descrire vn quarré autour d'vn cercle.



Tirez pareillement deux diametres AB, & CD perpendiculaires l'vn à l'autre : & par les poincts A,B, C,D, tirez des lignes perpendiculaires, qui seront tangentes (*par la* 16. *du* 3.) Ie dis que la figure FGHI est vn quarré,

Demonstration. En la figure AEDG, puisque les angles E, & A sont droicts les lignes AG, ED, seront paralleles (*par la* 29. *du* 1.) GD, & AE seront encore paralleles ; doncques AEDG est vn parallelogramme, & (*par la* 34. *du* 1.) les lignes AG, ED, AE, DG sont esgales entr'elles & chacune est égale au demi-diametre, les angles E, & G, sont aussi

égaux, donc l'angle G eſt droict : ainſi ie puis facilement prouuer, que les angles I, H, & F ſont droicts, & que toutes les autres lignes des petits parallelogrammes, ſont eſgales au demi-diametre : & entr'elles; doncques les lignes FG, IH, IF, HG ſont eſgales à tout le diametre, & eſgales entr'elles.

PROPOSITION VIII.

Probleme.

La façon d'inſcrire vn cercle dans vn quarré.

Diuiſez par le milieu les coſtez AB, BD, DC, AC: aux poincts E, F, G, H, & tirez les lignes EG, FH qui ſe couppent au poinct I. Ie dis que les lignes HI, IF, IE, & IG ſont eſgales, & perpendiculaires aux coſtez AB, BD, DC, AC : en ſorte que le cercle tiré du poinct I, iuſques à l'interualle

IE, passera par F, par G, par H, & touchera les costez AB, BD, DC, AC.

Demonstration. Au quadrilatere ED, les lignes EG, BD conjoignent des lignes EB, GD. qui sont non seulement paralleles, à cause que les angles B, & D sont droicts; mais encore esgales chacune estant la moitié d'vn costé du quarré: doncques (*par la* 33. *du* 1.) estant égales, & paralleles, les angles E, & G seront droicts, (*par la* 29. *du* 1.) ainsi je prouueray que les angles H & F sont droicts: au parallelogramme EF, les costez opposez sont esgaux, (*par la* 34. *du* 1.) or les costez EB, & BF estans esgaux, puis qu'ils sont les moitiez des costez esgaux, les lignes IE, & IF sont esgales.

PROPOSITION IX.

Probleme.

La façon de deſcrire vn cercle autour d'vn quarré.

Tirez les deux diagonales AC, & BD; puis du poinct E, où les lignes ſe couppent iuſques au poinct B, décriuez vn cercle: je dis qu'il paſſera par les poincts A, D, C.

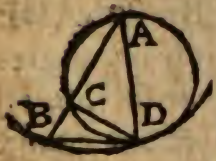
Demonſtration. Au triangle DAB, l'angle A eſtant droict (*par la definition du quarré*) les deux autres ABD, ADB, ſeront égaux à vn droict (*par la 32. du 1.*) or les coſtez AB, AD eſtant eſgaux, ces angles ſont auſſi égaux (*par la 5. du 1.*) doncques chacun eſt la moitié d'vn droit: ainſi ie montreray qu'au triangle ABC, les angles BAC, BCA, ſont chacun la moitié d'vn droict: enſuite au triangle AEB, les angles EAB, EBA ſeront égaux

chacun eſtant la moitié d'vn droict, & (*par la 6. du* 1.) les lignes AE, & EB ſeront égales : ainſi je prouueray que EB, EC ; EC, ED ſont eſgales, & que le cercle décrit du poinct E, iuſqu'à B paſſe par les poincts A, D, C.

PROPOSITION X.

Probleme.

La façon de deſcrire vn triangle iſoſcele, qui ayt deux angles dans ſa baſe, dont chacun ſoit le double de l'autre.



Diuiſez la ligne AB ; en ſorte que le rectangle compris ſous les lignes AB & CB ſoit égal au quarré de la ligne AC (*par l'onſiéme du* 2.) du poinct A iuſques à B, décriuez le cercle BD : dans lequel vous adiuſterez la ligne BD, égale à la ligne AC ;

tirez enſuite la ligne AD: je dis que le triangle ABD eſt tel que vous deſirez. Pour le voir, tirez, la ligne DC, & décriuez vn cercle autour du triangle ACD (*par la 5.*)

Demonſtration. Le quarré de la ligne AC ou de ſon égale BD, eſt égal au rectangle compris ſous AB, & ſous BC, la ligne BD touchera le cercle ACD. (*par la 37. du 3.*) & les angles BDC, & A ſeront égaux (*par la 32. du 3.*) adjouſtez le commun ADC, les angles BDC, & CDA, c'eſt à dire, l'angle total BDA, ſera égal aux angles A, & ADC: or l'externe BCD, eſt auſſi égal aux angles internes A, & ADC, (*par la 32. du 1.*) doncques les angles BCD, & ADB ſont égaux: les lignes AB, AD, eſtant égales (*par la definition du cercle*) les angles B, & ADB ſont égaux (*par la 6. du 1.*) ainſi les angles DBC, DCD ſont eſgaux, & (*par là 5. du 1.*) les coſtez BD, CD, & BD eſtant égaux à la ligne AC, les lignes AC, & CD ſont égales: & (*par la 5. du 1.*) les angles A, & ADC ſont égaux: or puis que l'angle BCD eſt égal aux 2. internes, l'angle BCD, ou

l'angle B qui luy est égal sera double eu égard à l'angle A : ainsi nous auons fait vn triangle isoscele ABD, dont l'angle B, est le double de l'angle A.

PROPOSITION XI.

Probleme.

La maniere d'inscrire dans vn cercle vn pentagone, dont tous les côtez & tous les angles soient esgaux.

Faites vn triangle ABG isoscele, dont l'angle B soit le double de l'angle A ; (*par la precedente*) puis inscriuez dans le cercle, le triangle DEF, equiangle au triangle ABC : (*par la* 2.) diuisez par le milieu les angles DEF, DFE, & tirez les lignes EG, HH : (*par la* 9. *du* 1.) Enfin faites les lignes HD, DG, GF, HE : je dis que vous auez in-

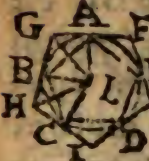
ſcrit vn pentagone equilateral & equiangle.

Demonſtration. Les angles DEG & GEF eſtant la moitié de l'angle DEF, ſont égaux à l'angle EDF, de meſme que les angles DFH, EFH : doncques (*par la 26. du 3.*) les cinq arcs DG, GF ; FE, EH, HD, ſont eſgaux, & les lignes qui les couppent ſont auſſi eſgales : ainſi nous auons prouué que le pentagone eſt equilateral, & puis que les ſegments HEF, EFG ſont égaux, les angles HEF, EFG ſeront auſſi eſgaux (*par la 27. du 3.*)

PROPOSITION XII.

Probleme.

La façon de deſcrire autour d'vn cercle vn pentagone, dont les coſtez & les angles ſoient égaux.



Décriuez dans le cercle vn pentagone equilateral, & equiangle ABCDE (*par la precedente*) & par les poincts A, B, C, D, E tirez des tangentes FG, GH, HI, IK, KF. Ie dis que vous auez fait ce qu'on a propoſé : pour la preuue : tirez les lignes LA, LG, LH, LC du centre L.

Demonſtration. Les lignes GA, & GB, qui ſont tangentes, tirées du meſme poinct G, ſont égales (*par le coroll. de la* 36. *du* 3.) ainſi (*par la* 8. *du* 1.) les triangles ALG, GLB ſont entierement eſgaux, de meſme que les angles ALG, & BLG, & ſeront la moitié de l'angle total

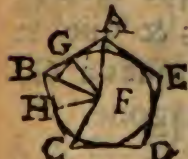
ALB ; de meſme façon ie prouueray que les angles BLH, CLH ſont la moitié de l'angle BLC : or puiſque les angles ALB, BLB, ſont égaux (*par la* 27. *du* 3.) tous les angles ALG, BLG, BLH, CLH le ſont auſſi ; doncques tous les autres que l'on peut former en tirant les autres lignes le ſeront encore. Cõſiderons maintenant les triangles GLB, BLH, dont les angles BLH, BLG ſont égaux, au poinct B ſont droicts, & dont le coſté BL eſt commun à tous deux, doncques (*par la* 26. *du* 1.) les lignes BG, BH, ſont égales, ainſi ie monſtreray que les moitiés de tous les coſtez ſont égales ; & enſuite que le pentagone eſt equilateral : & parce que nous auons monſtré que les angles LGB, LHB ſont égaux, qui ſont chacun la moitié des angles G, & H ; les angles G, & H, & tous les autres ſeront égaux.

PROPO

PROPOSITION XIII.

Probleme.

La façon d'inscrire vn cercle, dans vn pentagone dont les costez & les angles sont égaux.



Diuisez par le milieu deux angles A & B, du pentagone regulier, (*par la 9. du 1.*) & du poinct F, où les lignes AF, & BF se rencontrent, tirés la perpendiculaire FG : décriuez vn cercle du poinct F, comme centre, à l'interualle FG : je dis qu'il touchera tous les costez du pentagone regulier, c'est à dire, qu'ayant tiré les perpendiculaires FH, & les autres, elles seront égales à FG.

Demonstration. Aux triangles AFG, BFG, l'angle G estant droict, & les angles FAG, FBG estant égaux, puis qu'ils sont la moitié des angles égaux A & B,

les lignes AG, & GB, ſeront eſgales, (*par la 26. du 1.*) comme BH, & HC. Il eſt facile de monſtrer que les lignes BH, BG ſont auſſi eſgales, parce que les triangles BFG, & BFH ſont rectangles au poinct H, & ont les angles HBF, GBF eſgaux; l'angle B ayant eſté diuiſé par le milieu, & le coſté BF, eſtant commun; doncques les triangles ſont égaux entierement, & les lignes FH, FG ſont eſgales, ainſi ie monſtreray que les autres perpendiculaires le ſont; & que le cercle décrit du poinct F, iuſques à G, touche tous les coſtez du pentagone.

PROPOSITION XIV.

Probleme.

La façon de deſcrire vn cercle autour d'vn pentagone regulier.

Diuiſez deux angles A, & B par le milieu, & du poinct F, où les lignes AF, BF ſe rencontrent, décriuez vn cercle iuſques aux poincts A & B: je dis qu'il paſſera par les autres angles; c'eſt à dire que les lignes AF, FB, & les autres ſont eſgales: tirez la perpendiculaire FG.

Demonſtration. La perpendiculaire FG diuiſe par le milieu le coſté AB, ainſi que j'ay monſtré dans la precedente, & puis qu'aux triangles FGA, & FGB l'angle G eſt droict, les coſtez AG, & BG ſont eſgaux: or le coſté FG eſt commun; doncques les baſes BF, FA ſont eſgales (*par la* 4 *du* 1.) ainſi ie prouueray que

les autres lignes FC, FD, FE, ſi elles eſtoient tirées ſeroient eſgales à la ligne AF.

Coroll. Vous pouuez conclurre de là, qu'en vne figure reguliere, ayant diuiſé ſes angles, vous pouuez inſcrire vn cercle, ou le deſcrire autour d'elle. Et ayant inſcrit dans vn cercle vne figure reguliere, vous en décrirez vne autour du cercle.

PROPOSITION XV.

Probleme.

La façon d'inſcrire dans vn cercle vn exagone dont les angles & les coſtez ſoient eſgaux.

Tirez par le centre A le diametre BAC, puis du poinct C, iuſques au poinct A, décriuez vn cercle DAE; tirez enſuite les diametres EAG, DAF: puis les lignes CD, CE, EF, BG, BF,

DG : je dis que l'exagone eſt acheué.

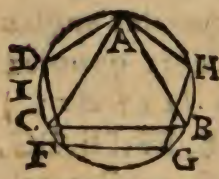
Demonſtration. Le triangle ACE, eſt equilateral, comme auſſi ACD : doncques chaque angle eſt la troiſieſme partie de 2. droicts : (*par la* 32. *du* 1.) ainſi les angles DAC, CAE ſont chacun le tiers de deux droicts : or les trois angles CAD, DAC, CAE, valent deux droicts, (*par la* 16. *du* 1.) doncques ayant oſté les deux tiers de deux droits DAC, CAE, reſte que l'angle GAD eſt vn tiers de deux droicts : & ie concluds que les angles GAD, DAC, CAE, & leurs oppoſez ſont eſgaux ; enſuite (*par la* 27. *du* 3.) tous les coſtez GD, DC, CE, EF, FB, BG, eſtant eſgaux ; l'exagone eſt equilateral, & chaque angle eſtant compoſé de deux tiers de deux droicts ; le meſme exagone eſt equiangle.

Coroll. De là il s'enſuit que le coſté de l'exagone eſt eſgal au demi-diametre.

PROPOSITION XVI.

Probleme.

La façon d'inſcrire dans vn cercle, vn pentedecagone equilateral, & equiangle.



Inſcriuez premierement dans le cercle, vn triangle equilateral ABC: (*par la 2.*) & [*par l'onſiéme*] vn pentagone regulier ADFGH, diuiſez la ligne DC par le milieu au poinct I: je dis que ſi vous tirez les lignes DI, IC, CF, elles feront les trois coſtez du pentedecagone; en ſorte que ſi vous adjoûtez dans les autres arcs du pentagone, trois lignes qui leur ſoient eſgales, vous aurez acheué le pentedecagone.

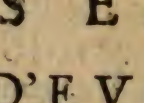
Demonſtration. Puiſque la ligne AC eſt le coſté d'vn triangle équilateral,

l'arc ADC ſera la troiſieſme partie du cercle ; ſi doncques l'on doit diuiſer le cercle en 15. parts, l'arc ADC en contiendra 5. les arcs AD, & DF en contiendront chacun trois, l'arc DC, en a deux; mais ſi vous le diuiſez par le milieu, nous en aurons trois DI, IC, CF. Pour trois parties du pentedecagone, & les lignes qui coupperont les arcs du cercle, ſeront les coſtez du meſme pentedecagone.

LIVRE CINQVIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. La partie eſt vne moindre grandeur comparée à vne plus eſtenduë.



Supposé que la ligne CD ſoit de quatre pieds, elle s'appelle partie, quand on la compare auec la ligne AB de 6. pieds, encore que CD ne ſoit pas dans AB : car afin que la ligne CD, ſoit appellée partie de AB, il ſuffit qu'on puiſſe coupper dans AB, la ligne AE, eſgale à CD: ie dis le meſme du tout; car l'on donne ce

nom à la quantité la plus grande comparée à la moindre, soit qu'en effet elle contienne la moindre; soit qu'elle ne la contienne pas, pourueu qu'elle contienne vne grandeur qui lui soit esgale.

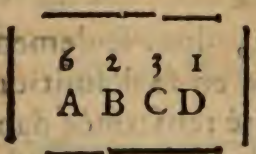
La partie prise à ce sens, se diuise en partie aliquote, & en partie aliquante.

1. La partie aliquote, dont seulement Aristote entend parler en sa definition, est vne moindre quantité renfermée dans vne plus grande qu'elle mesure: *C'est à dire, c'est vne petite quantité comparée auec vne plus grande, qu'elle esgale precisement, quand elle est prise plusieurs fois: par exemple, vne ligne de deux pieds est partie aliquote, d'vne ligne de 6. pieds.*

2. La multiple est la quantité la plus grande dans laquelle la plus petite est cõprise, quand celle-cy mesure exactemẽt celle-là; *c'est à dire, que c'est la plus grande quantité, comparée auec la plus petite, qu'elle contient plusieurs fois exactement, sans qu'il y ayt quoy que ce soit de redondant, par exemple vne ligne de 6. pieds, est multiple eu égard à vne ligne de 2. pieds; &*

elle eſt triple ; car elle la contient trois fois.

La partie aliquante eſt vne moindre quantité, comparée auec vne plus grande qu'elle ne meſure pas preciſement: *Comme la ligne de quatre pieds eſt vne partie aliquante d'vne ligne de 6. pieds.*



Que l'on propoſe deux quantités A, & C chacune deſquelles contienne autant de fois preciſement ſa conſequente; on les appelle equimultiple. comme ſi A eſt triple de B, & Ce triple de D.

3. Raiſon eſt vn rapport d'vne quantité à vne autre, de meſme eſpece.

I'ay adiouſté de meſme eſpece, parce que Euclide adiouſte incontinent apres.

4. Les quantitez ont quelque raiſon leſquelles eſtant multipliées peuuent ſe ſurpaſſer l'vne l'autre. *Et pour cét effet, il eſt neceſſaire, qu'elles ſoient de meſme eſpece : ainſi vne ligne n'a point de raiſon, auec vn quarré, parce que, quoy qu'on multiplie vne ligne, elle ne ſurpaſſera iamais vn quarré. Puiſque la raiſon eſt vne*

espece de rapport, & de relation, elle doit necessairement auoir deux termes, le premier desquels se nomme antecedent par les Mathematiciens, & par les Philosophes fondement; & le second consequent, ou terme: par exemple de la raison ou du rapport qu'il y a de A, à B; A se nomme antecedent: & B consequent; comme au contraire du rapport, ou de la raison qu'il y a de B, à A, B s'appelle antecedent, & A consequent.

La raison se diuise, en raison rationelle, & raison irrationelle. La raison rationelle se rencontre seulement entre les quantités qui peuuent auoir vne mesure commune à toutes deux, comme entre vne ligne de 4. pieds, & vne ligne de 6. pieds; car elles ont vne ligne de deux pieds pour mesure commune, tous les nombres ont entr'eux vne raison rationelle: en sorte que les quantitez qui n'ont pas raison rationelle; ne se peuuent exprimer par nombre.

La raison irrationelle est entre deux quantitez incommensurables; c'est à dire, qui n'ont point de commune mesure, comme le rapport qu'il y a du côté du quarré à

ſa diagonale, car on ne peuſt trouuer de meſure tant petite ſoit elle qui puiſſe exactement meſurer l'vn & l'autre : auſſi ne ſe peut elle exprimer par nombre.

Quatre grandeurs auront vne meſme raiſon, c'eſt à dire, la premiere aura méme raiſon & meſme rapport à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme, quand elles auront vn ſemblable rapport, ou vne ſemblable relation; mais ce n'eſt pas vne choſe ſi facile d'expliquer, ce que c'eſt que d'auoir vne relation ſemblable. Et c'eſt ce poinct qui fait toute la difficulté de ce Liure : car Euclide n'a pas donné vne definition de la ſimilitude de la raiſon, qui expliquaſt ſa nature; mais il s'eſt contenté, de donner vn ſigne, par lequel nous puiſſions examiner, ſi quatre quantitez auoient vne meſme raiſon, ou vn meſme rapport entr'elles, ce ſigne eſt bien infaillible, mais il n'eſt pas ſi clair qu'il puiſſe tenir lieu d'axiome, en effet il n'y a preſque point de propoſition, dans tout le liure, qui ne ſoit plus claire, & qui ne puiſſe à meilleur tiltre paſſer pour axiome : c'eſt ce qui a donné occaſion à quelques-vns, de ſe

contenter

contenter de la simple proposition bien expliquée, pour moy sans me seruir des preuues embarrassées, tirées des equimultiples; ie ne laisseray pas de prouuer facilement les mesmes propositions.

5. Euclide veut que quatre grandeurs ayent vne mesme raison, lors que ayant multiplié autant de fois la premiere que la troisiéme, & ayant aussi multiplié esgalement la seconde, & la quatriesme de quelque multiplication que ce soit; trois choses arriuent tousiours, premierement si la multiple de la premiere, surpassant la multiple de la seconde, la multiple de la troisiéme surpasse encore la multiple de la quatriesme; en second lieu si la multiple de l'vne estant esgale, celle de l'autre l'est encore: enfin, si cette multiple est à la correspondante moindre, quand l'autre est moindre; Il dit que pour lors la premiere à la seconde a mesme raison que la troisiesme à la quatriesme.

A, B, C, D,
2 4 3 6
8. 8. 12. 12
E, F G H

Comme si l'on propose quatre quantités A, B, C, D, & que l'on prenne des equimultiples de la premiere A, & de la troisiesme C. comme des quadruples qui soient E & G. qu'on prenne aussi des equimultiples de la seconde B, & de la quatriesme D, comme des doubles F, & H. s'il arriue tousiours que la quantité E, estant esgale à la quantité F, G soit esgale à H, & que quand E est plus grande que F, G soit plus grande que H; & enfin que quand E est plus petite que F; G soit aussi plus petite que H. si cela arriue tousiours en quelque multiplication que ce soit. Il dit que pour lors il y a mesme raison de A, à B, que de C, à D.

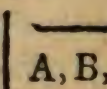
Il me semble q'Euclide deuoit prouuer ce qu'il aduançât, & nous ne serions pas obligez à suppléer à son defaut, si les propositions de ce liure pouuoient se prouuer par cet axiome.

Mais ce qu'il dit ne suffit pas pour bien comprendre ce que c'est, que quatre grandeurs auoir mesme raison entre elles; car

encore que l'on puisse dire, que quand la premiere grandeur eu esgard à la seconde; est vn tout semblable au tout de la troisiesme grandeur comparée à la quatriesme; ou quand elle est vne semblable partie, cependant cette definition ne conuient pas à la raison d'esgalité, ainsi pour donner vne definition generale, il faut premierement remarquer ce que c'est qu'vne partie aliquote estre semblable.

Les semblables parties aliquotes sont celles qui sont contenuës autant de fois l'vne que l'autre, dans leur tout. Exemple le nombre de 2. est vne partie aliquote du nombre de 6. semblable au nombre 3. à l'esgard de 9. parce que 2. est contenu autant de fois dans 6. que 3. dans 9.

5. Il y aura doncques mesme raison de la premiere, à la seconde, que de la troisiesme à la quatriesme; si la premiere contient autant de fois les parties aliquotes de la seconde; que la troisiesme contient de fois, les semblables parties aliquotes de la quatriesme; & pourueu que cela arriue en toutes sortes de parties aliquotes.

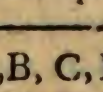


Comme ſi A contient autant de fois la dixieſme, centieſme, millieſme cent millieſme partie aliquote de B, que C contient de fois la dixieſme, centieſme, millieſme, cent millieſme partie aliquote de D, & ainſi de toutes les autres, en ſorte que, il n'y ait aucune partie aliquote de B, qui ſe trouue plus de fois dans A, que la ſemblable partie aliquote de C. ne ſoit contenue autant de fois en D (encore que dans les raiſons irrationelles, il reſte touſiours quelque choſe) alors il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D. cette proprieté eſt generale, & conuient à toute ſorte de proportions. Elle eſt rapportée par le P. Iacques, qui pourtant ne s'en ſert pas en ſes demonſtrations.

6. Suiuant cette definition il y aura plus grande raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, quand la premiere contiendra plus de fois quelque partie aliquote de la ſeconde, que la troiſieſme ne contient vne ſemblable partie aliquote de la quatrieſme, comme 101. *à plus grande raiſon à* 10. *que* 200.

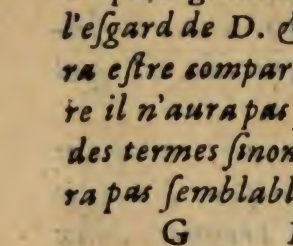
à 20. *parce que* 101. *contient cent & vne fois la dixieſme de* 10. *&* 20. *contient ſeulement cent fois la dixieſme de* 20. *qui eſt* 2.

Auant que paſſer outre nous pouuons prouuer cette definition, & pour l'eſtablir il me ſemble que ie dois prouuer deux poincts: le premier que ſi la premiere grandeur a la meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, ce que i'ay propoſé arriuera. Secondement que toutes les fois que cette proprieté ſe rencontrera, les quatres grandeurs auront meſme raiſon; en ſorte que dés que l'on dira que les 4. *grandeurs ne ſont pas proportionelles, ie puiſſe monſtrer que cette proprieté ne s'y rencontre pas.*



Pour la premiere, c'eſt à dire que s'il y a meſme raiſon de A à B que de C à D; A contiendra les parties aliquotes de B, autant de fois que C contient les ſemblables parties aliquotes de D. ce poinct me ſemble clair, car ſi A contient cent & vne fois la dixieſme de B, & que C ne contienne que cent fois la dixieſme de D, A ſera

vn plus grand tout comparé à B, que C à l'eſgard de D. & par conſequent il ne pourra eſtre comparé de meſme façon, c'eſt à dire il n'aura pas ſemblable relation, qui ſont des termes ſinonimes auec ceux-cy, il n'aura pas ſemblable raiſon.



Le ſecond poinct eſt que ſi cette proprieté s'y rencontre, les quantités auront meſme raiſon. Ie le prouue de la ſorte, ſi A B contient autant de fois les parties aliquotes de CD, que E, contient les parties de F, ie dis qu'il y a meſme raiſon de AB à CD, que de E, à F; car s'il n'y auoit pas meſme raiſon, ſuppoſons que la quantité AB ſoit plus grande qu'il ne faut, pour auoir meſme raiſon à la quantité, que la quantité E l'a à FCD, retranchez ce qu'il y a de trop, en ſorte que AG, ait vne meſme raiſon à CD, que E à F. Enſuite que l'on diuiſe CD par le milieu, au poinct H, puis HD par le milieu au poinct I, & IK par le milieu au poinct K. ſi l'on continuë de la ſorte, l'on arriuera enfin à vne ſi petite partie KD, qu'elle ſera plus petite que GB. or cette par-

tie KD, eſt vne partie aliquote, puis qu'elle prouient d'vne diuiſion par le milieu, & ce pourra eſtre vne moitié, vn quart, vne huictieſme, vne ſexieſme, vne trente-deuxieſme, ou vne ſoixante quatrieſme, mais ce ſera touſiours vne partie aliquote : or y ayant meſme raiſon de AG, à CD, que de E à F. AG contiendra autant de fois KD partie aliquote de CD, que E contient de fois la ſemblable partie aliquote de E, ainſi GB eſtant plus grande que KD, AB contiendra vne fois plus KD, que AG ne la contient pas ; doncques AB contient plus de fois KD partie aliquote de CD, que E ne contient la ſemblable partie aliquote de F, ce qui eſt contre la ſuppoſition, enſuite ſi AB contient autant de fois les parties aliquotes, de CD; que E contient de fois les parties aliquotes de F, il y aura meſme raiſon de AB. à CD, que de E à F.

7. Les quantitez qui ont meſme raiſon s'appellent proportionelles.

8. Car l'analogie ou proportion n'eſt autre que la ſimilitude de raiſon.

9. La proportion doit auoir pour le moins trois termes. *Car afin qu'il y ait*

proportion, c'eſt à dire ſimilitude de raiſon, il faut qu'il y ait deux raiſons : or chaſque raiſon eſtant eſpece de relation, elle doit auoir deux termes, en ſorte que deux raiſons demanderoient quatre termes, comme quand on dit, A ſe rapporte à B, comme C, à D. cependant on peut prendre deux fois le meſme terme, comme quand ie dis qu'il y a meſme raiſon de A, à B, que de B à C.

A, B, C, D
3 6 12 24

10. Les grandeurs ſont continuellement proportionelles, quand celles qui ſont au milieu ſont priſes deux fois, vne fois comme antecedentes, & l'autre comme conſequentes. *Cela eſt ainſi quand ie dis, il y a meſme raiſon de A à B que de B à C, & de C à D.*

11. Alors la quantité A comparée à C a vne raiſon doublée eu eſgard à celle qui ſe rencontre de la meſme quantité A à la quantité D, & la raiſon eſt triplée eu eſgard à celle qui ſe rencontre de la quantité A à la quantité B.

12. Les grandeurs homologues ſont les antecedents, comparées aux antecedents, & les conſequents aux conſequents. *Com-*

me si la premiere à mesme raison à la seconde ; que la troisiesme à la quatriesme: la premiere, & troisiesme s'appellent homologues, comme aussi la seconde, & quatriesme, les definitions suiuantes sont des façons d'argumenter que l'on pretend de prouuer dans ce liure.

A, B, C, D
4. 2. 6. 3.

13. La raison Alterne, ou permutée, est le rapport d'vn antecedent, à l'autre, & d'vn consequent, à l'autre. *Par exemple, si ayant supposé qu'il y a mesme raison de A, à B, que de C, à D, ie concluds, donc il y a mesme raison de A, à C, que de B, à D, pourueu que les quatre quantitez soyent de mesme espece; car si A & B, estoient des lignes, & C & D des quarrés, cette façon d'argumenter ne vaudroit rien, car il ne peut y auoir de rapport entre vne ligne & vn quarré. Voyez la proposition 16.*

14. La raison conuerse, est le rapport du consequent à l'antecedent. *Comme si ayant supposé qu'il y a mesme raison de A, à B, que de C, à D: ie concluds doncques, qu'il y a méme raison de B, à A, que de D à C. voyez le coroll. de la 16.*

15. La compoſition de raiſon eſt quand vne quantité composée de l'antecedent & du conſequent a du rapport au conſequent. *Par exemple, ſi ſuppoſant qu'il y a meſme raiſon de A, à B, que de C à D, ie concluds, doncques il y a meſme raiſon de AB à B, que de CD à D. c'eſt à dire 6. a 2. comme 9. a 3. voyez la 18.*

16. La diuiſion de raiſon ſe rencontre lors qu'il y a du rapport de l'excez de l'antecedent, ſur le conſequent, au meſme conſequent. *Comme ſi de ce qu'il y a meſme raiſon de AB, à B, que de CD, à D, ie concluds doncques il y a meſme raiſon de A à B, que de C, à D, c'eſt à dire s'il y a meſme raiſon de 6. a 2. que de 9. a 3. il y aura meſme raiſon de 4. à 2. que de 6. a 3. voyez la 17.*

17. La conuerſion de raiſon eſt quand il y a du rapport des antecedents aux differences des termes. *Comme ſi de ce qu'il y a meſme raiſon de AB, à B, que de CD, à D, ie concluds, donc il y a meſme raiſon de AB à A, que de CD, à C. voyez la 18.*

18. La raiſon auec eſgalité eſt le rapport des quantitez extremes, auec ſoubſtraction de celles qui ſont au milieu. *Comme ſi de ce qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de E à F, & de B, à C que de F, à G, & de C, à D que de G, à H : Ie concluds doncques il y a meſme raiſon de A à D, que de E à H.*

19. La raiſon d'eſgalité auec ordre, eſt quand les quantitez des deux rangs ſe comparent de meſme façon, comme dans l'exemple precedent, voyez la 22.

La raiſon d'eſgalité ſans ordre, eſt lors que les quantitez des deux rangs ſe comparent de diuerſe façon. *Comme ſi de ce qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, & de BE, à E, que de F à C, Ie concluds doncques, il y a meſme raiſon de A à E, que de F à D. voyez la 23.*

Ie propoſe icy l'exemple de toutes les façons d'arguméter par proportion, A ſe rapporte à B, comme C à D.

La raiſon alterne.

Doncques A ſe rapporte à C, comme B, à D.

La raiſon conuerſe.

Doncques E ſe rapporte à A, comme D à C.

Compoſition de raiſon.

Doncques AB ſe rapporte à B, comme CD à D.

Diuiſion de raiſon.

S'il y a meſme raiſon de 12. à 3. que de 8. à 2. il y aura meſme raiſon de 9. à 3. que de 6. à 2.

Conuerſion de raiſon.

S'il y a meſme raiſon de 9. à 3, que de 6. à 2. il y aura meſme raiſon de 9. à 6. que de 6. à 4.

Egalité ordonnée		Egalité ſans ordre.	
12. 6. 3.	8 4. 2	12 6 2	24.8.4
12. à 3.	8 à 2	12 à 2	24 à 4.

Ce

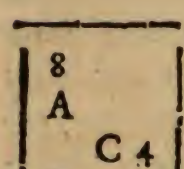
Ce Liure contient 25. propoſitions d'Euclide, auſquelles on en a adiouſté 10. autres, communement receuës par les Mathematiciens. Les 6. premieres d'Euclide ne ſeruent que pour prouuer les autres, par la voye des equimultiples : c'eſt pourquoy nous les laiſſerons, puiſque nous ne nous ſeruons pas de cette methode ; neantmoins ſans changer le nombre ny l'ordre des propoſitions, de peur qu'il ne ſe gliſſe de la confuſion dans les citations : or toutes les propoſitions ſont des Theoremes.

Demande.

On demande que trois quantités A,B,C eſtant données ; il s'en puiſſe donner vne quatriéme proportionnelle D, c'eſt à dire vne qui ſoit telle, qu'il y ayt meſme raiſon de C à D, qu'il y a de A à B.

PROPOSITION VII.

Les quantitez eſgales, ont ſemblable raiſon à la meſme, & la meſme aux eſgales.



Que les quantitez A, & B ſoient égales; je dis que A à meſme raiſon à C, que B à C.

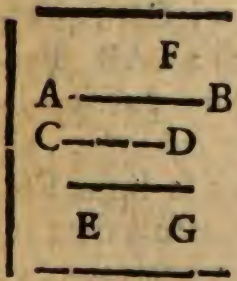
Demonſtration. Si A n'a pas meſme raiſon à C que B, doncques (*par la definition 5.*) A contient quelque partie aliquote de C, que B, ne contient pas; ainſi A eſt plus grande que B, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Ie dis en ſecond lieu que la quantité C a sẽblable raiſon à la quãtité A qu'à la quantité B: car ſi C n'auoit pas ſemblable raiſon à A qu'elle a à B, elle l'auroit plus grande à l'vne des deux. Poſons le cas que ce ſoit à A, donc (*par la 6. definition*) C contiendroit plus de fois vne partie aliquote de A. par exemple le quart qu'elle ne contiendroit vne ſembla-

ble partie aliquote de B, ainſi le quart de A, ſeroit plus de fois en C, que le quart de B : enſuite il ſeroit plus petit, & la quantité A plus petite que B.

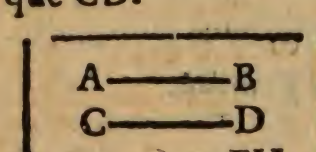
PROPOSITION VIII.

Vne plus grande quantité a vne plus grande raiſon à vne autre quantité qu'vne moindre, & vne quantité a vne plus grande raiſon à vne moindre qu'à vne plus grande.



La quantité AB eſt plus grande que CD, l'on propoſe vne troiſiéme quantité E : je dis que AB, à vne plus grande raiſon à la quantité E, que CD : retranchez de la ligne AB, la partie AF, égales à GD; puis imaginez-vous que l'on diuiſe la ligne E par le milieu, & vne de ſes parties encore par le milieu ; iuſques à ce qu'il reſte vne quantité G, qui ſoit vne partie aliquote de E, mais plus petite que FB.

Demonſtration. Puiſque AF & CD ſont eſgales, il y aura vne meſme raiſon de AF à E, que de CD à E, & (*par la definition* 5.) AF contiendra autant de fois G partie aliquote de E, que CD : & puiſque FB eſt plus grande que G, AB contiendra plus de fois la partie aliquote G que CD : doncques (*par la definition* 6.) AB, aura vne plus grande raiſon à E que CD.



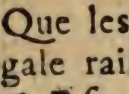
Ie dis en ſecond lieu que la ligne E a vne plus grande raiſon à CD, qu'elle ne l'a à AB. Prenez vne partie aliquote de CD, le quart par exemple, s'il eſt tellement contenu dans la ligne EG, qu'apres l'auoir pris quelquefois il ne reſte rien de cette ligne, il eſt certain que le quart de AB plus grand que celuy-là ne s'y trouuera pas tãt de fois; & par conſequent E à CD aura vne plus grande raiſon qu'elle ne l'a à AB ; mais ſi le quart de CD ayant eſté oſté autant de fois qu'il ſe pourra de la quantité E,

laisse quelque chose de reste, FG, qui reste, sera plus petit que le quart de CD. Posons le cas que le quart de CD se trouue en EF 5. fois que l'on oste de E autant de fois le quart AB, lequel estant plus grand que le quart de CD, s'il reste quelque chose, il sera moindre que FG, que ce soit HG, diuisez la ligne E par le milieu, & vne de ses parties encore par le milieu, ainsi consecutiuement iusques à ce que vous trouuiez vne partie aliquote plus petite que FH, posons le cas que ce soit la sezieſme : puisque donc dans EF il y a 5. fois le quart de CD, il y aura 20. sezieſmes, & puisque FH est plus petite qu'vne sezieſme de CD, il y aura dans EG vingt-vne sezieme de CD; mais il n'y a dans la mesme que 20. seziémes de AB; car il n'y a iustement que cinq fois le quart de AB, dans le reste HG il y aura bien pour le moins autant de fois la seziéme de CD, que la seziéme de AB, qui est plus grande, doncques la ligne E contient plus de seziémes de CD que de AB, ainsi il y a vne plus grande raison de la ligne E à CD, que de la mesme ligne E à la ligne AB.

PROPOSITION IX.

Les quantitez qui ont vne eſgale raiſon à la meſme quantité, ſont égales ; & reciproquement toutes celles ſont eſgales qui ont vne eſgale raiſon à la meſme quantité.

Que les quantitez A, & B ayent vne égale raiſon à la quantité C : je dis que A & B ſont égales.



Demonſtration. Si A & B n'eſtoient pas égales, l'vne des deux comme A auroit vne plus grande raiſon à C (*par la precedente*) ce qui eſt contre la ſuppoſition.

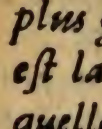
Secondement, ſi la quantité C a vne meſme raiſon aux quantitez A & B : je dis que A, & B ſont égales.

Demonſtration. Si A & B n'eſtoient pas égales, l'vne des deux comme A ſeroit plus grande que B ; doncques (*par la*

precedente) C auroit vne plus grande raiſon à la quantité B qu'à la quantité A, ce qui eſt auſſi contre la ſuppoſition.

PROPOSITION X.

De deux quantitez celle qui a vne plus grande raiſon à vne troiſiéme eſt la plus grande, & celle à laquelle cette troiſiéme a vne plus grande raiſon, eſt plus petite que l'autre.



Que la quantité A ayt vne plus grande raiſon à la quantité C, que B; je dis que A eſt plus grande que B.

Demonſtration. Si A n'eſtoit pas plus grande que B, elle ſeroit, ou eſgale ou moindre: ſi elle eſt eſgale, A & B auroient vne meſme raiſon à C; & cependant on ſuppoſe le contraire: ſi A eſtoit plus petite que B, pour lors B auroit vne plus grande raiſon (*par la 9.*) ce qui eſt

auſſi contre la ſuppoſition.

Secondement, ſi C a vne moindre raiſon à A, que à B: je dis que A, eſt plus grande que B.

Demonſtration. car ſi A n'eſtoit pas plus grande, elle ſeroit ou eſgale, & pour lors (*par la* 8.) C auroit vne méme raiſon à A que à B: or l'on ſuppoſe le contraire; que ſi A eſtoit plus petite, pour lors (*par la* 9.) C auroit vne plus grande raiſon à A que à C, ce qui eſt auſſi contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XI.

Les raiſons qui ſont eſgales à vne troiſiéme, ſont eſgales entr'elles.

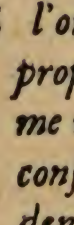
A,B. C,D. E,F.
4 2. 8. 4. 6,3.

Suppoſons qu'il y ayt vne meſme raiſon de A, à B; que de C, à D: & qu'il y ayt auſſi vne meſme raiſon de E à F, que de C à D: je dis qu'il y a vne meſme raiſon de A à B; que de E à F.

Demonſtration. Puiſqu'entre A & B, il y a vne meſme raiſon qu'entre C & D, A contiendra autant de parties aliquotes de B, que C en contient de D, (*par la 5. definition*) or puiſqu'entre E, & F il y a vne meſme raiſon qu'entre C, & D; il ne ſe peut que E ne contienne autant de parties aliquotes de F, que C en contient de D. Enſuite autant que A contient de parties aliquotes de B, autant E contient de ſemblables parties de F : doncques (*par la definition 5.*) il y a vne meſme raiſon de A à B que de E à F.

PROPOSITION XII.

Si l'on propoſe pluſieurs quantitez proportionelles, il y aura vne meſme raiſon d'vn antecedent, à ſon conſequent, que de tous les antecedens à tous les conſequens.



Suppoſons qu'il y ayt vne meſme raiſon de A à B, que de C à D, c'eſt à dire que A, B; & C, D; ſoient proportionnelles; je dis que A & C pris enſemble, ont vne meſme raiſon à BD, pris enſemble; que A, à B; ou que C, à D.

Demonſtration. Puiſque A a vne meſme raiſon à B, que C à D, A contiendra autant de parties aliquotes de B; que C, en contient de D: je ſuppoſe que A contienne trois fois vne neufviéme de B, C contiendra auſſi trois fois vne neufviéme de D: or vne neufviéme de B, & vne

neufviéme de D, font vne neufviéme de BD, doncques AC, pris enſemble contiennent 3. fois vne neufviéme de BD, & ce que i'ay prouué d'vne neufviéme ſe peut entendre de toute autre partie aliquote. Il y a doncques autant de parties aliquotes de BD dans AC, qu'il s'en trouue de B dans A, ainſi (*par la 5. definition*) il y a vne meſme raiſon de A à B, que de AC à BD.

PROPOSITION XIII.

Deux raiſons eſtant eſgales, ſi l'vne des deux eſt plus grande qu'vne troiſiéme raiſon, l'autre auſſi le ſera.

Suppoſons qu'il y ayt vne meſme raiſon de A à B, que de C à D. & que la raiſon de C, à D ſoit plus grande que de E, à F: je dis qu'il y a vne plus grande raiſon de A, à B; que de E, à F.

Demonſtration. Puis qu'entre C, & D la raiſon eſt plus grande qu'entre E & F ; C contiendra plus de fois quelque partie aliquote de D, que E n'en contiendre de F : (*par la 6. definition* ;) or A contient autant de fois la ſemblable partie aliquote de B ; que C de D, (*par la 5. definition*) doncques A contient plus de fois vne partie aliquote de B, que E n'en contient de F, ainſi il y a vne plus grande raiſon de A à B, que de E à F.

PROPOSITION XIV.

S'il y a vne meſme raiſon d'vne premiere quantité à vne ſeconde, que d'vne troiſiéme à vne quatriéme : la premiere eſtant plus grande, ou eſgale, ou moindre que la troiſiéme, la ſeconde ſera auſſi plus grande ou eſgale ou moindre que la quatriéme.

AB, CD

Suppoſons qu'il y ayt vne meſme raiſon de A à B, que de C à D : je dis premierement

ment que ſi A, eſt plus grande que C ; B ſera auſſi plus grande que D.

Demonſtr. Puiſque A eſt plus grande que C : il y aûra vne plus grande raiſon d'A à B, que de C à B, (*par la 9.*) ainſi la raiſon eſtant entre C & D, la meſme qu'entre A & B, elle ſera plus grande de C à D que de C à B; & enſuite (*par la 10.*) B ſera plus grande que D.

Ie dis en ſecond lieu, que ſi A eſt égale à C ; B ſera auſſi égale à D.

Demonſtration. Puiſque A & C ſont égales, il y aura vne meſme raiſon de C à B, que de A à B : (*par la 8.*) or comme A ſe rapporte à B, ainſi C ſe rapporte à D, doncques C ſe rapportera à D comme à B ; & (*par la 9.*) B & D ſeront égales.

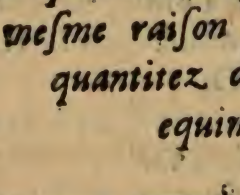
Ie dis en troiſiéme lieu que ſi A eſt plus petite que C : B ſera plus petite que D.

Demonſtration. Puiſque A eſt moindre que C : il y aura vne plus grande raiſon de C à B, que de A à B ; (*par la 8.*) ce qu'eſt A à l'égard de B, C'eſt le meſme à l'égard de D : doncques il y a vne plus

grande raiſon de C à B, que de C à D, & (*par la* 10.) B ſera moindre que D.

PROPOSITION XV.

Les quantitez equimultiples ont vne meſme raiſon entr'elles que les quantitez dont elles ſont equimultiples.



Que l'on propoſe deux quantitez B & D, dont A, & C ſoient les equimultiples, c'eſt à dire, que A contiendra autant de fois B, que C contiendra D: je dis qu'il y a vne meſme raiſon d'A à C; que de B à D.

Imaginez-vous que l'on diuiſe la quantité A, en trois parties E, F, G, chacune égale à B, ce qui ſe peut faire, puiſque A eſt multiple de B: diuiſez de meſme C, en trois parties HIK égales à D: il y en aura autant en l'vne qu'en l'autre, puis

que A & C, ſont equimultiples de B & de D.

Demonſtration. Il y aura vne meſme raiſon d'E à H, que de B à D, de F à I, & de G à K : doncques (*par la* 12.) y il aura vne meſme raiſon de EFG priſes enſemble à HIK; c'eſt à dire; de A à C, que de B, à D.

COROLLAIRE.

Pareil nombre de parties aliquotes de deux tous, ont vne meſme raiſon que les tous: car nous auons demonſtré dans cette propoſition, qu'il y a vne méſme raiſon d'E à H, que d'A à B, comme auſſi de F à I, doncques (*par la* 12.) nous pouuons dire qu'il y a vne meſme raiſon de EF, qui ſont deux tiers de A à HI; deux tiers de C que B à D, & de A à C.

PROPOSITION XVI.

La raiſon Alterne.

Si 4. grandeurs ſont proportionnelles & de meſme eſpece, elles ſeront alternatiuement proportionnelles.

Ie ſuppoſe qu'A ſoit à l'égard de B, ce qu'eſt C à l'égard de D; & que ces 4. grandeurs A, B, C, D, ſoient de meſme eſpece, c'eſt à dire toutes quatre lignes, ou toutes quatre ſurfaces, ou toutes quatre ſolides: je dis qu'il y a vne meſme raiſon d'A à C que de B à D.

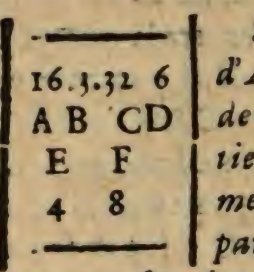
12. 8. 9.6 A.B.C.D

Demonſtration. Si la raiſon d'A à C n'eſt pas la méme que de B à D: ſuppoſons qu'elle ſoit plus grande, il s'enſuiura (*par la 6. definition*) que A contiendra plus de fois quelque partie aliquote de C, que B n'en contient de D: je veux que ce ſoit le tiers, & que le tiers de C ſe rencontre quatre fois dans A, &

que le tiers de D se trouue seulement trois fois dans B : apres cela que l'on s'imagine que A & B sont diuisez en quatre parts esgales. Puisque A contient 4. fois le tiers de C, chasque quart de A contiendra vne fois le mesme tiers, & vn quart de B ne contiendra pas vn quart de D. ainsi trois quarts de A contiendront trois tiers de C, c'est à dire ne seront pas plus petits que C, & trois quarts de B seront plus petits que D. D'ailleurs ce qu'est A l'égard de B, le mesme sont les trois quarts de A à l'égard des trois quarts de B (*par le coroll. de la precedente* :) doncques entre les trois quarts de A, & les trois quarts de B, il y auroit vne mesme raison, qu'entre C & D ; ensuite si les trois quarts de A ne sont pas plus petits, que C, les trois quarts de B ne seront pas plus petits que C : (*par la* 14.) Doncques la raison d'A à C ne sera pas plus grande, que de B à D: je monstreray de mesme façon qu'il n'y a pas vne plus grande raison de B à D, que de A à C; ainsi la raison d'A à C, est la mesme que de B à D.

LEMME.

S'il y a vne mesme raison de la premiere, à la seconde: que de la troisiesme à la quatriesme: quelque partie aliquote que l'on prenne de la premiere, elle aura vne mesme raison, à la seconde, qu'vne semblable partie aliquote de la troisiesme, à la quatriesme.



Supposons que la raison d'A à B, soit la mesme que de C à D; ie dis qu'E partie aliquote d'A, à vne mesme raison à B, que F partie aliquote de C à D.

Demonstration. Puisque *la raison d'A à B, est la mesme que de C à D; la raison d'A à C sera la mesme que de B à D,* (par la precedente:) *or ce qu'A est cõparé à C; E l'est comparé à* F, *doncques ce qu'est E à l'égard de* F, *B l'est à l'égard de* D; &

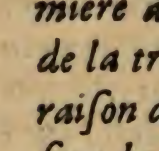
(par la precedente) *ce qu'eſt E à l'égard de B, F eſt comparée à D.*

Mais parce que nous auons beſoin d'vne demonſtration, qui ſoit concluante, meſme quand les quatre quantitez ne ſont pas de meſme eſpece. Nous deuons prouuer la meſme verité d'vne autre façon : doncques ſi les quantitez ſont differentes, & qu'il y ayt vne plus grande raiſon d'E à B, que d'F à D : (par la definition 6.) *E contiendra plus de fois quelque partie aliquote, par exemple, quatre fois le tiers de B, que F ne contiendra le tiers de D, qu'elle ne contiendra que trois fois : enſuite E priſe quatre fois ; c'eſt à dire, A contiendra ſeize fois le tiers de B, & F priſe quatre fois, c'eſt à dire C ne contiendra pas huict fois le tiers de D; ainſi il n'y aura pas vne meſme raiſon de A à B, que de C à D, ce qui eſt contre la ſuppoſition.*

La raiſon conuerſe.

COROLLAIRE

Qu'Euclide a mis apres la quatrieſme propoſition, ſi la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt la meſme que de la troiſieſme à la quatrieſme, la raiſon de la ſeconde à la premiere ſera la meſme que de la quatieſme, à la troiſieſme.



Ie ſuppoſe qu'A ſe rapporte à B, comme C, à D: je dis qu'il y aura vne meſme raiſon de B à A, que de D à C.

Demonſtration. Puis que A à l'égard de B eſt comme C à l'égard de D, entre A & C il y aura le meſme rapport qu'entre B & D (*par la* 16.) doncques par la meſme B ſera à l'egard d'A, ce qu'eſt C à l'égard de D; mais parce

que cette façon de preuue suppose que les grandeurs AB,CD soient de mesme espece, & que pourtant la proposition est plus vniuerselle ; nous auons besoin d'vn autre preuue.

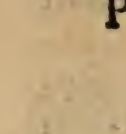
Demonstration. Si cela n'est pas, supposons que B ayt vne plus grande raison à A, que D à C : doncques (*par la 6. definition*) B contiendra plus de fois vne partie aliquote de A, que D n'en contiendra de C : je veux par exemple que B contienne 8. fois le quart d'A, & que D contienne seulement sept fois le quart de C, puisque A se rapporte à B comme C à D, qu'vne partie aliquote d'A, telle qu'est le quart E, se rapportera à B, comme F le quart de C, se rapporte à D ; (*par le precedent lemme*) & ensuite le quart d'A pris huict fois auroit vne mesme raison à B, qu'auroit à D huict fois le quart de C, ce qui seroit cependant ouuertement faux, si B n'auoit pas vne mesme raison à A, que D, à C : puisque comme j'ay monstré huict fois le quart d'A ne surpasseroit pas B, & huict fois le quart de C surpasseroit D, doncques B, n'a

pas vne plus grande raiſon à A, que D à C.

PROPOSITION VII.

Diuiſion de raiſon.

Si les grandeurs compoſées ſont proportionelles : elles ſeront proportionelles eſtant diuiſées.



Ie ſuppoſe qu'il ayt vne meſme raiſon de AB, à B: que de CD, à D: ie dis qu'en les diuiſant il y aura vne meſme raiſon de A, à B, que de C, à D.

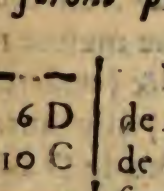
Demonſtration, puiſque il y a vne meſme raiſon de AB à B, que de CD, à D. AB contiendra autant de fois les parties aliquotes de B, que CD en contiendra de D, oſtés de ſes parties aliquotes de B qui ſont en AB, celles que B contient, oſtés de meſme des parties aliquotes de D qui ſont en CD celles que D contient, B contient autant de ſes propres parties aliquo-

es, que D en contient des siennes : doncques il restera en A autant de parties aliquotes de B, qu'en C de parties aliquotes de D. Il y a doncques vne mesme raison de A à B & de C à D, que de AB à A, & de CD à D.

PROPOSITION VIII.

Composition de raison.

Si les grandeurs diuisées sont proportionelles : estant composées, elles seront proportionnelles.



Ie suppose que la raison de A à B, soit la mesme que de C, à D : Ie dis que la raison de AB, à B, sera la mesme que de CD, à D.

Demonstration : puisque A, se rapporte à B, comme C, à D. A contiendra autant de parties aliquotes de B, que C de D ; adioustez celles que contiennent B, & D, qui sont esgales en nombre, puisque

B contient autant de ſes parties aliquotes, que D en contient des ſiennes, AB contiendra autant de parties aliquotes de B, que CD de D. Il y a doncques vne meſme raiſon de AB à B, que de CD à D.

COROLLAIRE.

conuerſion de raiſon.

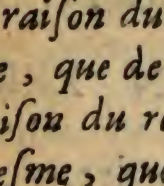
Que AB ſe rapporte à B, comme CD à D; je dis qu'il y a meſme raiſon de AB à A, que de CD, à C.

Demonſtration. Puiſque AB ſe rapporte à B comme CD à D, en diuiſant (*par la* 17.) il y aura vne meſme raiſon de A à B, que de C à D, & (*par conuerſion du Coroll. de la* 16.) il y aura vne meſme raiſon de B à A, que de D à C: & (*par la* 18.) la raiſon de AB à A, ſera la meſme que de CD à C.

PROPO

PROPOSITION XIX.

Si la raiſon du tout, au tout eſt la méme, que de la partie à la partie; la raiſon du reſte, au reſte ſera la meſme, que du tout, au tout.



Ie ſuppoſe qu'il y ayt vne meſme raiſon de AB, à CD; que de B, à D: je dis qu'il y a vne meſme raiſon du reſte A, au reſte C, que d'AB à CD.

Demonſtration. Puis qu'AB ſe rapporte à DC, comme B à D, (*par la* 16.) il y aura vne meſme raiſon d'AB à B, que de CD à D, & (*par le coroll. de la* 18.) AB ſera à l'égard d'A ce qu'eſt CD à l'égard de C; & enſuite la raiſon de AB, à CD, ſera la meſme que d'A à C.

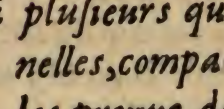
Les Propoſitions XX. & XXI.

Ne ſont pas neceſſaires, & ſont contenuës dans la 22. & 23.

PROPOSITION XXII.

La raiſon auec ordre.

Si pluſieurs quantités ſont proportionelles, comparées à d'autres & qu'on les prenne deux à deux, auec ordre, les extremes ſeront proportionelles.



Que l'on propoſe trois grãdeurs A, B, C, & autant de l'autre coſté, D, E, F, qui ſoient proportionelles, deux à deux auec ordre; c'eſt à dire que A ſoit à B, comme D, à E; & B, à C, comme E, à F; Ie dis que A, ſera à C; comme D, à F.

Demonſtration., S'il n'eſtoit pas ainſi, ſuppoſons que A ait vne plus grande rai-

ſon à C que D à F, doncques A contiendra plus de parties aliquotes de C que D n'en contiendra de F. Ie veux que A contienne 12. moitiés de C, & que D ne contienne qu'onze moitiés de F. Or parce que B, eſt à C, ce que E eſt à F, B contiendra autant de moitiés de C, que E en contient d'F; ſuppoſons qu'il y en a ſix de coſté & d'autre. Doncques A qui contient 12. moitiés de C aura vne plus grande raiſon à B, qui contient 6. moitiés de C, que D qui ne contient qu'onze moitiés de F, à E qui contient 6. moitiés de E, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XXIII.

La raiſon ſans ordre.

Si pluſieurs quantitez ſont proportionnelles, comparées à d'autres, & qu'on les prenne deux à deux ſans ordre, les extremes ſeront proportionelles.

A,B.C DE FG
12. 6. 3. 8 4. 2 1

Que l'on propoſe trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, qui ſoient proportionelles ſans ordre; c'eſt à dire que le meſme qu'A eſt à B; E le ſoit à F. & ce que B eſt à C; D le ſoit à E. Ie dis que A ſera à C ce qu'eſt D à F. adiouſtez la quantité G en ſorte que ce que B eſt à C; F le ſoit à G.

Demonſtration. Puiſque la raiſon d'A à B, eſt la meſme que d'E à F. & de B à C; & que de F à G, (*par la precedente*) la raiſon d'A à C ſera la meſme que d'E à G, & puis qu'il y a vne meſme raiſon de

D à E que de F à G; la raiſon (*par la* 16.) de D à F ſera la meſme que de E à G, doncques il y a vne méme raiſon d'A à C, que de D à F.

PROPOSITION XXIV.

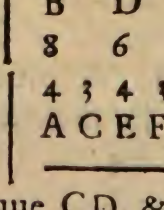
Si la raiſon de la premiere, à la ſeconde, eſt la meſme que de la troiſieſme à la quatriéme, & que la cinquieſme ait vne meſme raiſon, à la ſeconde, que la ſixieſme, à la quatrieſme; la raiſon de la premiere, & de la cinquiéme à la ſeconde, ſera la meſme que de la troiſiéme, & de la ſixiéme à la quatriéme.

Suppoſons qu'A ſoit à l'égard de B ce qu'eſt C à l'eſgard de D, & E à l'égard de B ce qu'eſt F à l'égard de D. Ie dis que AE à B, aura la meſme raiſon qu'a CF, à D.

Dem. Puis que E ſe raporte à B, comme F, à D; en changeant, meſme raiſon ſe rencontrera de B, à E; que de D, à F; enſuite ce qu'A eſt comparé à B, C l'eſt comparé à D; & ce qu'eſt B comparé à E, D l'eſt comparé à F; doncques la raiſon d'A à E ſera la meſme (*par la* 22.) que de C, à F; & en compoſant AE, ſe rapporte à E de meſme que CF, à F; enſuite AE comparé à E eſt le meſme que CF comparé à F; E & F ſont les meſmes à l'égard de B, & (*par la* 22.) la raiſon d'AE, à B, ſera la meſme que de CE, à D.

PROPOSITION XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles : la plus grande, & la plus petite, ſont plus grandes, que les deux autres.



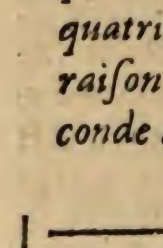
Que l'on ſe propoſe les grandeurs proportionelles AB, CD, E; F. qu'AB, ſoit la plus grande, & F la plus petite; Ie dis qu'AB, & F; ſont plus grandes que CD, & E.

Demonſtration. Puiſque la raiſon d'AB à CD, eſt la meſme que de E, à F, & que AB eſt la plus grande; elle ſera plus grande que E, & (*par la* 14.) CD ſera plus grande que F, retranchez doncques de CD, la grandeur C, eſgale à F, & de AB, la grandeur A, eſgale à E. Il y aura enſuite vne meſme raiſon de AB, à CD, que de A à C. & (*par la* 19.) le reſte B aura vne meſme raiſon à D que AB à CD; or AB eſtant plus grande que CD, B ſera plus grande que D, A & E ſont eſgales, ſi doncques vous leur adiouſtés F & C qui ſont auſſi égales, A & F, ſeront égales à C, & à E, adiouſtez à AF, B plus grande & à CE, adiouſtez D plus petite, que B, AB, & F ſeront plus grandes, que CD & E.

Les 9. propoſitions ſuiuantes ne ſont pas d'Euclide, cependant on les cite ſouuent, comme ſi elles eſtoient à luy; nous ne les auons pas voulu obmettre.

PROPOSITION XXVI.

Si la premiere à vne plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatriéme : par conuerſion, la quatrieſme aura vne plus grande raiſon à la troiſieſme, que la ſeconde à la premiere.



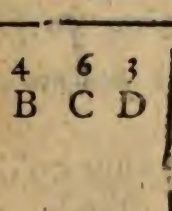
Ie ſuppoſe qu'il y ayt vne plus grande raiſon d'A à B que de C à D. Ie dis qu'il y a vne plus grande raiſon de D à C ; que de B, à A : ie ſuppoſe encore qu'il y a vne meſme raiſon d'E à B, que de C à D.

Demonſtration. Puiſque E, eſt à l'égard de B ce qu'eſt C à l'égard de D, il y aura vne meſme raiſon de B à E, que de D à C, & puis qu'il y a vne plus grande raiſon de A à B que de E à D, A ſera plus grande que E, (*par la* 7.) (*& par la* 8.)

il y aura vne plus grande raiſon de B à E que de B à A, doncques il y a vne plus petite raiſon de B à A, que de D, à C.

PROPOSITION XXVII.

Si la premiere a vne plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; il y aura alternatiuement vne plus grande raiſon de la premiere à la troiſieſme, que de la ſeconde à la quatrieſme.



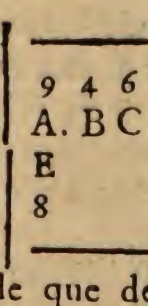
Si la raiſon d'A à B eſt plus grande que de C à D. Ie dis qu'il y aura vne plus grande raiſon d'A à C, que de B à D, or ſi E a vne méme raiſon à B, que C à D, & enſuite plus petite que A ne l'a à B (*par la* 8.) E ſera plus petite qu'A.

Demonſtration. puiſque E eſt à l'égard de B ce que C eſt à l'égard de D, E comparé à C ſera ce qu'eſt B comparé à D

(*par la* 16.) & puiſque A eſt plus grande que C, il y aura (*par la* 8.) vne plus grande raiſon d'A à C, que E à C, & conſequemment que de B à D.

PROPOSITION XXVIII.

S'il y a vne plus grande raiſon de la premiere, à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme; la premiere & la ſeconde priſes enſemble, auront vne plus grande raiſon, comparées à la ſeconde ſeule, que la troiſieſme, & la quatrieſme priſes enſemble comparées à la quatrieſme.



Si ie prouue qu'il y ayt vne plus grande raiſon d'A à B, que de C à D; Ie dis qu'à meſme temps ie prouueray que la raiſon de AB, à B, eſt plus grande que de CD, à D: pour cela ſuppoſons que la grandeur E ayt vne meſme raiſon à B, que C, à D; il faudra conclur-

re (*par la* 8.) que E sera plus petite que A, & ensuite que EB sera plus petite que AB.

Demonstration. Puis qu'il y a vne méme raison d'E à B que de C, à D; il y aura aussi vne mesme raison de EB à B, que de CD, à D; & parce que AB, est plus grande que EB, il y aura vne plus grande raison de AB à B, que de CD, à D. (*par la* 8.)

PROPOSITION XXIX.

Si la premiere, & la seconde ont vne plus grande raison comparées à la seconde; que la troisiesme & la quatriesme comparées à la quatriesme, mesme en diuisant ces quantités vnies la premiere aura vne plus grande raison à la seconde; que la troisiesme, à la quatriesme.

Ie suppose que la grandeur AB ayt vne plus grande raison à B, que CD à C. Ie dis qu'A à B; aura vne plus grande raison que C; à D: pour le voir

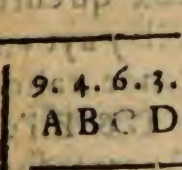
ſuppoſons qu'entre EB, & B, il y ayt vne meſme raiſon qu'entre CD, & D; cela eſtant EB ſera plus petite que AB, (*par la* 8.) & enſuite E ſera plus petite qu'A.

Demonſtration. Puiſque EB à l'égard de B a vne meſme raiſon que CD à l'égard de D, en diuiſant (*par la* 17.) il y aura, vne meſme raiſon d'E à B, que de C à D, & parce qu'A eſt plus grande qu'E il y aura vne plus grande raiſon d'A à B que de C, à D (*par la* 8.)

PROPOSITION XXX.

Si la premiere, iointe à la ſeconde, a vne plus grande raiſon comparée à la ſeconde, que la troiſiéme, iointe à la quatriéme comparée à la quatriéme, par conuerſion de raiſon, la premiere, iointe à la ſeconde aura vne plus petite raiſon comparée à la premiere ſeule, que la troiſiéme iointe

à la quatriéme comparée à la troiſiéme ſeule.



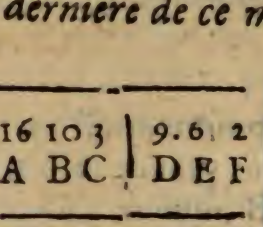
Suppoſons qu'il y ayt vne plus grande raiſon de AB à B, que de CD à D. Ie dis que par conuerſion de raiſon de AB à A la raiſon ſera moindre que de CD à C.

Demonſtration. Puis qu'il y a vne plus grande raiſon de AB à B, que de CD à D, il y en aura (*par la* 29.) vne plus grande d'A à B que de C à D (*& par la* 26.) il y en aura vne plus grande de D à C, que B à A, & (*par la* 28.) il y en aura de meſme vne plus grande de CD, à C, que de AB, à A.

PROPOSITION XXXI.

Si trois grandeurs, ont entre elles vne plus grande raiſon, que trois autres, la premiere du premier rang comparée a la derniere de ce meſme rang, aura vne plus grande raiſon, que la

premiere du ſecond, comparée à la derniere de ce meſme rang.



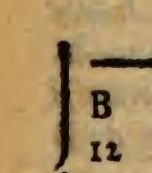
Ie veux qu'entre A & B, il y ayt vne plus grande raiſon qu'entre D & E: i'en dis autant de B à l'égard de C; car ie ſuppoſe encore que ſa raiſon ſoit plus grande que celle de E, à l'égard de F, cela eſtant, ie dis qu'il y a vne plus grande raiſon d'A à C, que de D, à F.

Demonſtration. Puiſque la raiſon d'A à B eſt plus grande que de D, à E; auſſi (*par la* 27.) celle d'A à D; ſera plus grande que de B, à E: de plus, s'il y a vne plus grande raiſon, de B, à C; que d'E, à F; il y en aura auſſi vne plus grande de . à E, que de C, à F: doncques la rai- l'A, à D, ſera plus grande que de C, *la* n changeant encore (*par la* 27.) *me, pa* l'A, à C, ſera plus grande que *miere, to plus petit miere ſeul*

PROPOSITION XXXII.

Theoreme.

Si trois grandeurs ont vne plus grande raiſon, que trois autres qui leur répondent ſans ordre, il y en aura vne plus grande de la premiere du premier rang, à ſa derniere, que de la premiere du ſecond rang, à ſa derniere.

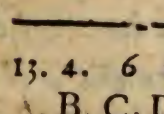


Suppoſons qu'entre A & B, il y ayt vne plus grande raiſon qu'entre I & K, & que de meſme la raiſon de C, à E ſoit plus grande que de H à I. Ie dis que A, à E aura vne plus grande raiſon que H, à K. Pour le voir, ſuppoſons que B ayt vne meſme raiſon à C, que I, à K; & que de C, à F la raiſon ſoit la meſme, que de H, à I.

Demonſtration. Puiſqu'il y a vne plus grande raiſon de A à C, que de I à K; & que ce qu'eſt I, á l'égard de K, B l'eſt à l'égard de C; B aura vne plus petite raiſon comparée à C, que A a comparée à C, & (*par la* 8.) A ſera plus grande; de plus puiſque C a vne plus grande raiſon à E, que H, à I, & que H à l'égard d'I eſt le meſme que C à l'égard de F, C aura vne plus grande raiſon à E, qu'à F, ainſi F ſera plus grande que E. Que ſi nous adjoûtons que la raiſon de B à C eſt la méme que de I, à K, & que C comparée à F a vne méme raiſon que H à l'égard de I, neceſſairemẽt il y aura vne meſme raiſon de B à F que de H à K: (*par la* 23.) & parce que A, eſt plus grande que B; auſſi y aura-t'il vne plus grande raiſon d'A à F que de B à F; enfin parce que E, eſt plus petite que F, il y aura encore vne plus grande raiſon d'A à E, que de B à F, où de H à K.

PROPOSITION XXXIII.

S'il y a vne plus grande raiſon du tout au tout, que de la partie à la partie, il y en aura auſſi vne plus grande du reſte au reſte que du tout au tout.

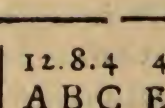


S'il y a vne plus grande raiſon de AB, à CD; que de la partie B, à la partie D; je dis qu'il y aura vne plus grande raiſon du reſte A au reſte C.

Demonſtration. Puiſque la raiſon de AB, à CD, eſt plus grande que de B, à D, il y aura auſſi (*par la* 26.) vne plus grande raiſon d'AB à B, que de CD, à D, & (*par la* 30.) la raiſon d'AB, à A, ſera moindre que de CD, à C, & enfin (*par la* 26.) il y aura vne moindre raiſon d'AB à CD, que de A à C.

PROPOSITION XXXIV.

Si l'on propoſe deux rãgs de quantités, & qu'il y ayt vne plus grande raiſon de la premiere du premier rang, à la premiere du ſecond rang, que de la ſeconde à la ſeconde, & ſi la raiſon de celles-cy, eſt plus grande que celle de la troiſiéme à la troiſiéme : & ainſi conſecutiuement, il y aura vne plus grande raiſon de tout le premier rang à tout le ſecond rang, que ſi l'on en oſtoit les premieres, pourtant plus petite, que celle de la premiere à la premiere.



Suppoſons qu'il y ayt vne plus grande raiſon d'A à B que de B à F; & de B à F, que de C à G: je dis premierement que la raiſon de tout le premier rang, A, B, C,

à tout le second rang EFG, est plus grande que celle de C à G.

Demonstration. Puisque par la supposition il y a vne plus grande raison d'A à E, que de B à F : il y en aura aussi (*par la 26.*) vne plus grande d'A à B, que de E à F, & par composition, il y en aura vne plus grande d'AB à B, que de EF à F ; & en changeant, il y en aura vne plus grande d'AB à EF, que de B à F : or la raison de C à G, est encore plus petite que la raison de B à F ; doncques il y aura vne plus grande raison d'AB à EF, que de C à G, & par composition il y en aura plus grande d'ABC à EFG que de C à G.

Ie dis en second lieu que la raison de ABC, à EFG, est plus grande que de BC, à FG.

Demonstration. Puisque la raison d'A à E est plus grande que de B à F, celle d'A à B sera plus grande que celle de E, à F ; & par composition la raison d'AB à B, sera plus grande que celle de EF à F : & en changeant, la raison d'AB à EF sera plus grande que celle de B à F : or puis qu'il y a vne plus grande raison du tout AB, au

tout EF, que de la partie B, à la partie F, il y en aura auſſi vne plus grande du reſte A, au reſte E, que du tout AB, au tout EF (*par la* 33.) & par la meſme ie proueray qu'il y a vne plus grande raiſon de B à F, que de BC à FG; doncques la raiſon d'A à E ſera beaucoup plus grande que celle de BC à FG, & en changeant, il y aura vne plus grande raiſon d'A, à BC; que de E à FG, comme par compoſition, il y en aura vne plus grande d'ABC à EFG que de BC à FG.

En troiſiéme lieu, je dis que la raiſon d'A à E; c'eſt à dire de la premiere du premier rang, à la premiere du ſecond, eſt plus grande que celle d'ABC à EFG.

Demonſtr. Puis qu'il y a vne plus grande raiſon, comme nous l'auons monſtré, de ABC à EFG, que de la partie BC, à la partie FG, il y en aura auſſi vne plus grande (*par la* 33.) du reſte A, au reſte E, que du tout ABC, au tout EFG.

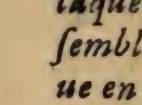
LIVRE SIXIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ayant les angles égaux ont proportionaux les costez qui comprennent ces angles, *Comme les triangles ABC, DEF, seront semblables, si l'angle A est égal à D B à E, C à F; & si entre les costez AB & BC il y a vne mesme raison qu'entre DE & DF, & entre EF & FD, qu'entre BC & CA.*

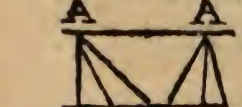
2. Les figures reciproques sont celles dont chacune a vn antecedent & vn consequent de deux raisons : *c'est à dire, les*

figures seront reciproques quand l'antecedent d'vne raison se trouue dans vne figure, & le consequent dans la seconde, dans laquelle se trouue l'antecedẽt d'vne raison semblable de laquelle le consequent se trouue en la premiere figure : en sorte que la comparaison finit dans la figure dans laquelle elle auoit commencé.



Comme dans deux parallelogrammes s'il y a mesme raison d'AB à CD, que de DE, à BF, les costez seront reciproques.

A C B 3. Vne ligne est couppée par la raison extreme, & par la moyenne, quand la raison de toute la ligne, au plus grand segment est la mesme que celle du grand segment au petit : *Comme si la raison d'AB à AC, est la mesme que d'AC, à CB.*



4. La hauteur d'vne figure, est la perpendiculaire tirée du plus haut poinct de la figure iusques à sa base : *ainsi aux triangles ABC la ligne AD est leur hauteur, soit que cette ligne tombe au de-*

dans du triangle, soit qu'elle tombe au dehors : or il faut remarquer que les triangles, & les parallelogrammes, égaux en leur hauteur, se peuuent loger entre des paralleles ; en sorte que les baſes BC, soient dans la meſme ligne : car si les deux perpendiculaires AD, sont égales, les lignes AA, & BC seront paralleles (par la 31 du 1.)

Ie dis le meſme de ces deux triangles ABC, ABD à conſiderer leur ſommet, qui eſt le meſme, ainſi ils ſont entre deux paralleles, & ont la meſme hauteur.

5. Vne raiſon eſt compoſée de pluſieurs autres raiſons, quand de ces quantitez de raiſons multipliées il en reſulte vne raiſon.

Il eſt à remarquer qu'il n'eſt aucune de ces proportions & raiſons que l'on nomme rationnelles, qui ne puiſſe auoir vn nom tiré de quelque nombre, par lequel ſoit ſignifié le rapport qu'il y a de l'antecedent au conſequent : car la raiſon de l'antecedent au conſequent, eſt la meſme que celle qu'a à l'vnité le nombre, duquel la raiſon porte le nom. Ainſi deux quantitez eſtans

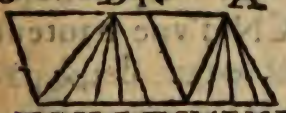
proposées, l'vne de douze pieds, l'autre de 6 nous disons que la raison de la premiere à la seconde est double, parce que le nombre de deux denote que la premiere grandeur est à l'égard de la seconde, que deux est à l'égard d'vn. Que si l'on proposoit ces deux quantitez 4. & 12. nous appellerions cette proposition soubtriple; car le trois signifie que la raison de 4. à 12. est la mesme que celle d'vn tiers d'vne vnité à l'vnité: Or quand il y a plusieurs raisons continuées par exemple 12. 6. 2. le denominateur de la raison de 12. à 6. qui est double; c'est 2. & le denominateur de la raison de 6. à 2. qui est triple c'est 3. pour sçauoir le denominateur de la raison de 12. à 2. composée de celle de 12. à 6. & de celle de 6 à 2. multipliez les denominateur 2. & 3. & vous aurez 6. denominateur de la raison de 12. à 2. qui est sextuple, composée de la double & de la triple, aussi pouuons-nous dire qu'elle est deux fois triple, ou trois fois double. Quand donc nous disons qu'vne raison est composée d'autres raisons, nous n'entendons autre chose, si ce n'est que son denominateur, a esté produit par la multiplica

tiplication des denominateurs des autres raisons.

PROPOSITION I.

Theoreme.

Les triangles & parallelogrammes, d'vne égale hauteur, ont vne mesme raison que leur base.



Les deux triangles ABC, DEF sont egaux en hauteur : je dis en premier lieu que du triangle ABC, au triangle DEF, il y a vne mesme raison que de la base BC à la base EF. Pour le voir, il faut s'imaginer que la base EF est diuisée en parties égales, par exemple en 4. & que du poinct D, l'on tire les lignes DI, DH, DG : en suite il faut partager la ligne CB, en autant de parties que l'on en trouuera d'égales à FI, IH, HG, GE : & que par ces poincts

de diuiſion l'on tire les lignes AM . AL, AK : tous ces triangles DFI,DIH,DHG, DGE , & ces autres ACM, AML , ALK. ayant des baſes égales , & (*par la definition* 4.) eſtant entre deux paralleles ſont égaux , doncques dans le triangle ABC, il y aura autant de petits triangles qui ſeront parties aliquotes du triangle DFG, qu'il y a dans CB des parties aliquotes de FE,(*doncques par la* 5. *definition du* 5.) il y aura vne meſme raiſon de FE , à CB que du triangle DEF, au triangle ABC.

Secondement, ie dis que les parallelogrammes DOEE , ABCN d'vne hauteur égale , parce qu'ils ſont entre deux paralleles , ont entr'eux vne meſme raiſon que leurs baſes.

Demonſtration. Les parallelogrammes ſont doubles comparez aux triangles precedens (*par la* 41. *du* 1.) ainſi (*par la* 15. *du* 5.) ils auront vne meſme raiſon , que les triangles ; or la raiſon des triangles eſt la meſme que celle de leurs baſes : doncques les parallelogrammes, ont vne meſme raiſon que leurs baſes.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Si l'on tire dans vn triangle vne ligne parallele, à vn des costez; elle couppera proportionnellement les autres costez; & si elle couppe proportionnellement, les deux costez; elle sera parallele au troisiéme.

Que l'on tire dans le triangle ABC, la ligne DE, parallele au costé BC : je dis que les costez AB, AC, sont couppez proportionnellement ; c'est à dire que la raison d'AD, à DB ; est la mesme que de AE à EC. Pour le voir, tirez les lignes BE, DC.

Demonstration. Les triangles ADE, DEC, ayant la mesme base DE, & estant entre les paralleles DE, BC, sont égaux, (*par la* 38. *du* 1.) doncques ils auront

vne meſme raiſon, au triangle ADE, (*par la 7. du 5.*) or (*par la 1.*) la raiſon du triangle DEB, au triangle ADE, eſt la meſme que celle de la baſe DB à la baſe AB; car ayant vne méme hauteur marquée par la lettre E & le triangle DEC, comparée au triangle ADE, ayant vne meſme raiſon que le coſté CE au coſté EA, la raiſon de DB à DA, ſera la meſme que de CE, à EA.

Secondement, ie veux qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AD à DB, que d'AE à EC & que l'on tire la ligne DE; je dis que BC, & DE ſont paralleles.

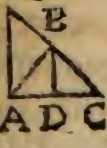
Demonſtration (*par la 1.*) la raiſon du triangle ADE, au triangle DEB, eſt la meſme que de la baſe AD, à la baſe DB, il y a encore vne meſme raiſon du meſme triangle ADB, au triangle DEC, que de la baſe AE, à la baſe EC; or l'on ſuppoſe que ce qu'eſt AD, à l'égard de DB, AE l'eſt à l'égard de EC: donques le triangle ADC a vne meſme raiſon aux triangles DEB, & DEC, & enſuite ces triangles ſont égaux, (*par la 7 du 5.*) & parce qu'ils ont la meſme baſe DE, il faut

qu'ils soient entre deux paralleles (*par la* 39. *du* 1.) doncques les lignes DE, & BC sont paralleles.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Si vne ligne diuise l'angle d'vn triangle par le milieu, elle diuisera la base en des segmens proportionnaux aux deux costez du triangle; & reciproquement, si vne ligne qui partage vn angle d'vn triangle en diuise la base en des segmens proportionnaux aux costez, l'angle sera diuisé par le milieu.



L'angle ABC est diuisé au milieu, par la ligne BD: je dis qu'il y aura vne mesme raison de CD, à DA, que de BC, à AB. Estendez le coste CB iusques au

poinct E, en ſorte que AB, & BE ſoient egales, puis tirez la ligne AE.

Demonſtration. Le triangle ABE, eſt iſoſcele, doncques (*par la 5. du 1.*) les angles BEA, BAE ſont égaux: or l'angle ABC, qui eſt externe, eu égard au triangle BAE, eſt égal aux deux internes oppoſez (*par la 32. du 1.*) doncques ABC eſt double comparé à l'angle E, il eſt auſſi double comparé à l'angle DBC, puiſque la ligne BD le diuiſe par le milieu: enſuite les angles BDC, & BEA ſont égaux; & par conſequent les lignes AE, & BD ſont paralleles (*par la 28. du 1.*) & (*par la 2. du 6.*) il y aura vne meſme raiſon d'EB, ou AB ſon égale à BC, que de AD, à DC.

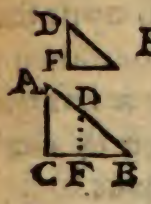
Secondement, ſi la ligne BD, diuiſe tellement la baſe AC, qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AD, à DC, que de AB, à BC, ie dis que l'angle ABC, a eſté diuiſé par le milieu: tirez les meſmes lignes.

Demonſtration. Puis qu'il y a vne méme raiſon d'AD à DC, que de AB, ou EB ſon égale à BC, les lignes AE, & DB,

ſont paralleles (*par la* 2.) ainſi l'angle DBC eſt égal à l'angle E (*par la* 30.*du* 1.) i'en dis autans des angles alternes DBA, BAE; car ils ſont égaux (*par la* 28.*du* 1.) or les angles BAE, BEA ſont auſſi égaux (*par la* 5. *du* 1.) doncques les angles ABD, DBC ſont égaux, & enſuite l'angle ABC a eſté diuiſé par le milieu.

PROPOSITION IV.

Les triangles equiangles ont les côtez proportionnaux, & d'autres homologues, ceux-là ſont proportionnaux, qui comprennent les angles égaux, & ceux-là ſont homologues, qui ſont oppoſez à ces meſmes angles.



Que l'on ſe propoſe deux triangles ABC, DEF, equiangles; c'eſt à dire, que l'angle B ſoit égal à l'angle E; A à D, C à F: je dis que la raiſon d'AB

à BC, est la mesme que DE à DF, & que celle d'AC à CB, est la mesme que de DF à FE : couppez le costé CB, du plus grand triangle, & faites la ligne EF, égale à EF, du petit, puis du poinct F, tirez FD, parallele à CA.

Demonstration. Les deux triangles DEF, sont entierement égaux (*par la 26. du 1.*) or puisque les costez FE sont égaux, les angles E & B sont égaux : F est supposé égal à C ; & tirant la parallele FD, l'angle EFD (*par la 29. du 1.*) est égal à l'angle C : or (*par la 2.*) il y a vne mesme raison d'AD à DB ou à DE, que de CF à FB, ou à FE ; doncques (*par composition de la 18. du 5.*) il y aura vne mesme raison d'AB à DE, que de CB, à FE ; ainsi ie prouueray facilement que la raison d'AC à CB, est la méme que de DF à FE ; si ie prenois la longueur de la ligne FE, dans BC, en commençant au poinct C. Remarquez que le costé AB opposé à l'angle C, est antecedent en vne raison, & le costé DE qui est opposé à l'angle égal F, est antecedent dans l'autre, & c'est ce que nous appellons homologues.

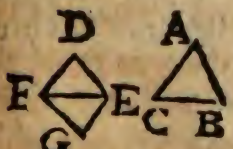
COROLLAIRE.

Ie concluds que ſi dans le triangle ABC, on tire vne ligne DF, parallele à vn des coſtez, on formera deux triangles ABC, DEF, qui ſeront ſemblables.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Si deux triangles ont les coſtés proportionnaux, Ils ſeront equiangles, & les angles oppoſez aux coſtez homologues ſeront égaux.



Ie ſuppoſe qu'aux triangles ABC DEF, la raiſon d'AB à BC, ſoit la meſme que de DE, à EF, & que celle de BC à AC, ſoit la meſme que de EF à FD : je dis que les angles A & D, B & E ; C, & E ſont égaux. Que l'on faſſe l'angle FEG, égal à l'an-

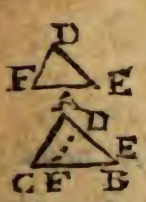
gle B ; & EFG égal à l'angle C, l'angle G ſera égal à l'angle A (*par la* 32. *du* 1.) & ainſi les triangles ABC, & FEG, ſont equiangles.

Demonſtration. Les triangles ABC, FEG, ſont equiangles, ainſi (*par la precedente*) la raiſon de FE, à EG, ſera la meſme que de BC, à AB, or ce qu'eſt CB, à l'égard de AB, FE l'eſt à l'égard de DE : doncques la raiſon de FE, à EG, eſt la meſme que de FE à DE : en ſuite (*par la* 7. *du* 5.) les lignes DE & EG ſont égales, ainſi nous prouuerons que FD, & FG ſont égales, doncques les triangles FDE ; FEG (*par la* 8. *du* 1.) ſont égaux entierement, leurs angles de meſme ſeront égaux, les angles G & D ſont encore égaux, & parce que l'angle G eſt égal à l'angle A, D luy ſera encore égal, & ainſi des autres.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Deux triangles seront equiangles qui auront vn angle égal, & les côtez qui les forment égaux.



Aux triangles ABC, & DEF, les angles B, & E sont égaux, & la raison d'AB à BC, est la mesme que de DE, à EF : Ie dis que les triangles ABC, & DEF sont equiangles. Pour le voir, que l'on couppe la ligne BC au poinct F, & que l'on face la ligne BF égale à EF & BD égale à FD : pour le faire, que l'on tire la ligne FD.

Demonstration. Puis qu'entre AB & BC il y a vne mesme raison qu'entre DE, & FE ; & puisque les lignes BD, & BF leur sont égales, la raison d'AB à BC sera la mesme que de BC à BF, & en diuisant (*par la* 17. *du* 5.) il y aura vne mesme

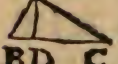
raison d'AD à CF, que de CF, à FB, & en changeant la raison d'AD à DB, sera la mesme de CF à FB, ainsi (*par la* 2.) les triangles sont equiangles.

L'on doit obmettre la 7. Proposition.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

Dans vn triangle rectangle, la perpendiculaire tirée de l'angle droict vers la base opposée diuise le triangle en deux triangles semblables, au grand triangle qui est le total.



Que l'on propose le triangle rectangle BAC, & que de l'angle droict BAC l'on tire la ligne AD, perpendiculaire à la base BC: je dis que les triangles ADC, ADB sont semblables, au triangle total ABC,

&

& pour le trouuer il ſuffit de monſtrer qu'ils ſont equiangles.

Demonſtration. Les triangles ABC, & DAC, ont l'angle C, commun ; l'angle droict BAC, eſt égal à l'angle droict ADC ; doncques (*par la* 32. *du* 1.) les autres angles DAC, & C ſeront égaux: l'on prouuera de la meſme façon que les triangles ABC, & ABD ſont equiangles.

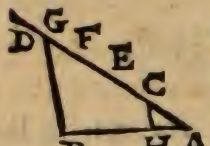
COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition que la ligne AD, eſt moyenne proportionnelle, entre les lignes BD, & DC ; car les triangles ADB, & ADC eſtant equiangles comparés à vn troiſiéme, le ſont entre eux ; doncques (*par la* 3.) la raiſon du coſté BD, oppoſé à l'angle BAD au coſté AD à l'angle B. Cette raiſon, diſ-je, eſt la meſme que celle du coſté AD, au coſté DC : or l'on voit que le coſté AD ; eſt oppoſé à l'angle C égal à l'angle BAD & que l'angle DC, eſt oppoſé à l'angle DAC, égal à l'angle B.

PROPOSITION IX.

Probleme.

La façon de retrancher d'vne ligne la partie que l'on voudra.



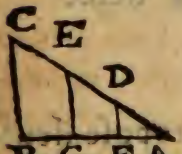
Si l'on veut retrancher la quatriéme partie de la ligne AB, il faut tirer la ligne AD infinie, dans laquelle à l'ouuerture du compas, vous coupperez consecutiuement quatre lignes égales AC, EC, EF, FG: ensuite tirez la ligne BG, puis sa parallele CH; je dis que AH est la quatriéme partie de la ligne AB.

Demonstration. Puisque CH, est parallele à BC; il y aura vne mesme raison d'AC, à CG, que de AH, à HB, (*par la* 4.) & par composition (*selon la* 18.) la raison d'AG à AC sera la mesme que de AB, à AH : or AG contient quatre fois AC, ensuite AH est le quart de AB.

PROPOSITION X.

Probleme.

Comment l'on peut diuiſer vne ligne de meſme façon qu'vne autre aura eſté diuiſée.



S'il faut diuiſer la ligne AB, de meſme façon que la ligne AC eſt diuiſée : faites que les lignes AB, AC ferment vn angle BAC ; puis tirez la ligne BC, & ſes paralleles EG, FD: je dis que AB eſt diuiſée de meſme façon que AC.

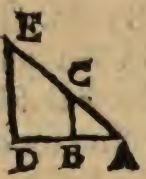
Demonſtration. Puiſque DF eſt parallele à EG : il y aura vne meſme raiſon de AD à DE, que d'AF, à FG (*par la* 4.) & par compoſition ; il y aura vne meſme raiſon de AE, à ED, que d'AG à FG : enfin, puiſque l'on a tiré la ligne EG, parallele à BC ; la raiſon d'AE, à EC, ſera la meſme que de AG, à GB : donc-

ques (*par la 22. du 5.*) il y aura vne même raison de DE, à EC; que de FG, à GB.

PROPOSITION XI.

Probleme.

La façon de trouuer vne troisiéme ligne proportionnelle, à deux lignes données.



Que l'on se propose deux lignes AB, AC; s'il faut trouuer vne troisiéme ligne qui leur soit proportionnelle; disposez tellement les lignes données qu'elles facent l'angle A: estendez ensuite la ligne AB, & faites la ligne BD, égale à AC, puis du poinct B, tirez la ligne BC, & la parallele DE, qui couppera la ligne AC alongée iusques au poinct E: je dis que CE, est cette troisiéme proportionnelle.

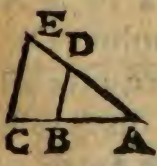
Demonstration. Puisque la ligne CB

eſt parallele au coſté DE, il y aura vne meſme raiſon d'AB à BD ou à ſon égale AC, que de AC à CE.

PROPOSITION XII.

Probleme.

La façon de trouuer vne quatriéme ligne proportionnelle, à trois lignes données.



Que l'on ſe propoſe AB, BC, AD auſquelles il faille chercher vne quatriéme proportionnelle. Pour cela diſpoſez les lignes AB, & BC en ligne droite, & que la ligne AD faſſe vn angle auec elles; tirez enſuite la ligne BD, puis CE qui luy ſoit parallele: je dis que DE eſt cette quatriéme proportionnelle.

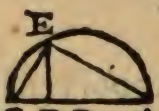
Demonſtrarion. Puiſque la ligne BD eſt parallele au coſté CE, il y aura vne meſme raiſon d'AB à BC, que d'AD, à

DE: doncques DE, est la quatriéme proportionnelle.

PROPOSITION XIII.

Probleme.

La façon de trouuer vne moyenne proportionnelle à deux lignes données.



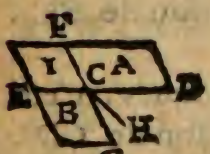
Si l'on demande une moyenne proportionnelle entre AB, & BC, diuisez la ligne AC, par le milieu au poinct D : & faites vn demi-cercle AEC ; ensuite tirez vne perpendiculaire BE : je dis que BE, est moyenne proportionnelle entre AB, BC. Pour le voir, tirez les lignes CE, AE.

Demonstration. L'angle AEC, estant dans vn demi-cercle est droict, (*par la* 31. *du* 3.) & (*par le coroll. du la* 8. *du* 6.) la perpendiculaire BE, est moyenne proportionnelle entre AB, & BC.

PROPOSITION XIV.

Theoreme.

Aux parallelogrammes égaux, & equiangles, les coſtez, qui comprennent les angles égaux, ſont reciproques: & les parallelogrammes equiangles ſont égaux, qui ont les coſtez reciproques.



Ie ſuppoſe que les parallelogrammes A & B, ſoient égaux de meſme que les angles C; je dis que les cõtez qui comprennent ces angles ſont reciproques: c'eſt à dire qu'il y a vne meſme raiſon de DC à CE, que de CG, à CF: conjoignez les angles C, en ſorte que les lignes DC, CE faſſent vne ligne droite, alors les lignes FC, CG, fairont encore vne ligne droite; car ſi la ligne FC eſtant alongée ne tomboit pas

sur CG: supposons qu'elle tombe sur CH, il s'ensuiuroit que les angles opposez HCE, DCF, seroient égaux (*Par la 15. du 1.*) ce qui est contre la supposition que nous auons faite, que les angles ECG, FCD fussent esgaux: acheuez le parallelogramme I.

Demonstration. Puisque les parallelogrammes A, & B sont esgaux, il y aura vne mesme raison d'A, à I que de B à I: or ce qu'est A comparé à I; cela mesme l'est CD comparé à CE; (*par la 1. du 6.* (& ce qu'est B à l'égard d'I, cela mesme l'est GC à l'égard de CF, doncques il y a vne mesme raison de BC, à CE, que de CG, à CF.

Si les costez sont reciproques, c'est à dire s'il y a vne mesme raison de CD, à CE, que de CG, à CF: je dis que les parallelogrammes A & B, sont égaux.

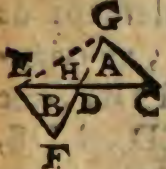
Demonstration. (*par la 1. du 6.*) il y a vne mesme raison de CD, à CE; que du parallelogramme B, au parallelogramme I: or la raison de CD à CE, est la mesme que de CG, à CF, doncques il y a vne mesme raison d'A à I, que de B à I, en-

ſuite (*par la 9. du 5.*) les parallelogrammes A, & B ſont égaux.

PROPOSITION XV.

Theoreme.

Aux triangles égaux, qui ont vn angle égal; les coſtez, qui comprennent cet angle; ſont reciproques, & les triangles ſont eſgaux, dont les coſtez, qui comprennent vn angle eſgal, ſont reciproques.



Suppoſons que les triangles A & B ſoient eſgaux, & que les angles GDC, & EDF le ſoient auſſi : je dis que les coſtez GD, DC; DE, DF, ſont reciproques: c'eſt à dire qu'il y a vne meſme raiſon de DC, à DE; que de DF, à DG: que l'on conjoigne les angles comme en la propoſition precedente, en ſorte que DC, & DE, faſſent vne meſme li-

gne, comme aussi DF, DG: & que l'on tire la ligne EG.

Demonstration puisque les triangles A, & B sont esgaux, il y aura vne mesme raison d'A à H, que de B, à H: or (*par la* 1. *du* 6.) la raison d'A à H est la mesme que de la base DC; à la base ED, & la raison de B à H, est la mesme que de FD, à DG; doncques il y a vne mesme raison de DC à DE, que de FD, à DG.

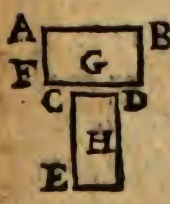
Secondement en faisant la mesme supposition, ie dis que si les costez sont reciproques; c'est à dire, si CD a vne mesme raison à DE; que DF, à DG; les triangles A & B sont esgaux.

Demonstration: (*par la* 1. *du* 6.) il y a vne mesme raison, non seulement de CD, à DE; que du triangle A, au triangle H, mais encore de FD, à DG, que de B à H; or la raison de CD, à DE, est la mesme que de FD, à DG; doncques il y a vne mesme raison de A, à H: que de B à H: ensuite (*par la* 9. *du* 5.) A, & B sont esgaux.

PROPOSITION XVI.

Theoreme.

Si quatre lignes ſont proportionnelles ; le rectangle compris ſous les extremes, eſt eſgal, au rectangle compris ſous celles du millieu ; & reciproquement ſi le rectangle compris ſous les extremes, eſt egal au rectangle compris ſous celles du milieu : les lignes ſont proportionnelles.



S'il a vne meſme raiſon d'AB, à CD que de CE, à AF; je dis que le rectãgle G, compris ſous les extremes AB, AF, eſt eſgal au rectangle H, compris ſous les lignes du milieu, CD & CE.

Demonſtration. Puiſque les rectangles G & H, ſont equiangles, & que les coſtez eſtant reciproques, il y a vne meſme rai-

ſon d'AB, à CD que de CE, AF: (*par la* 14.) les rectangles G & H, ſont eſgaux.

Secondement ſi les rectangles G, & H ſont eſgaux; il y aura vne meſme raiſon d'AB, à CD que de CD, à AF: (*par la meſme.*)

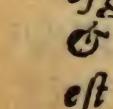
COROLLAIRE.

On demonſtre par cette propoſition la regle de trois, dans laquelle trois nombres eſtant donnez, on cherche le quatriéme proportionnel: car ſi l'on donne trois nombres AB 4. CD 2. CE 6. & que AF 3. ne ſoit pas conneu: ie multiplie 6. par 2. & faits le rectangle H, qui eſt 12. or ce rectangle eſtant égal au rectangle G, ie connois le rectangle G, lequel par conſequent eſt 12. le coſté AB 4. eſt conneu, ie diuiſe doncques 12. par 4. & le quotient ſera 3. c'eſt à dire le coſté AF que ie ne connoiſſois pas.

PROPOSITION XVII.

Theoreme.

Si trois lignes ſont proportionnelles : le rectangle ſous les extremes, eſt eſgal au quarré de celle du milieu; & ſi le quarré de celle du milieu, eſt eſgal au rectangle compris ſous les extremes ; les trois lignes ſont proportionnelles.



Ie ſuppoſe qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AB à DE, que de DE, à BC : ie dis que le rectangle compris ſous AB, & ſous BC eſt eſgal au quarré de DE ; faites vne ſeconde fois la ligne DE.

Demonſtration. Puiſque il y a vne meſme raiſon d'AB à DE, que de DE à BC : (*par la precedente*) le rectangle compris ſous AB, & ſous BC, ſera égal

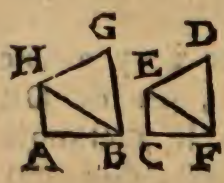
au rectangle compris sous les deux lignes DE, lesquelles estant esgales, le rectangle sera vn quarré: doncques le rectangle sous B, & sous BC est esgal au quarré de DE.

De méme ie dis que si le rectãgle compris sous les extremes, est esgal au quarré de DE, qui est celle du milieu, (*par la* 16.) il y aura vne méme raison d'AB à DE, que de DE à BC, ainsi ces trois lignes seront proportionnelles.

PROPOSITION XVIII.

Probleme.

La façon de décrire sur vne ligne, vn rectiligne semblable à vn autre, & posé de mesme façon.



Si l'on doit décrire vn rectiligne semblable au rectiligne CD: diuisez le rectiligne CD, en triangles, tirant la ligne FE: puis sur

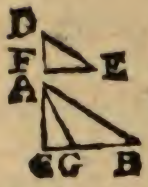
la ligne AB, faites les angles BAH, ABH, égaux aux angles CFE, & FCE, (*par la 32. du 1.*) les triangles ABH, & CEF, ſont eqniangles : Faites auſſi les angles HBG, BGH, égaux aux angles EFD, FED, les triangles HFG, EFD ſeront equiangles: je dis que le rectiligne AG, eſt ſemblable au rectiligne CD,

Demonſtration. Puiſque les triangles ABH, CFE, ſont equiangles, il y aura (*par la 4. du 6.*) vne meſme raiſon de HA à AC, que de EC, à CF; & de AB, à BH, que de CF à FE: Et puiſque les triangles HBG, EFD ſont auſſi equiangles, il y aura vne meſme raiſon de HB, à BG, que de EF; à FD, doncques (*par la 22. du 5.*) la raiſon d'AB, à BG, ſera la meſme que de CF, à FD; & ainſi des autres coſtez : enſuite en ces deux rectilignes, les angles ſont égaux; & les côtez qui comprennent ces angles, ſont proportionnaux.

PROPOSITION XIX.

Theoreme.

La raiſon des triangles ſemblables, eſt double, comparée à celle des cô-tez homologues.



Ie ſuppoſe que les triangles ABC, & DEF ſoient ſemblables, ou equiangles : je dis que la raiſon du triangle ABC, au triangl eDEF, eſt double, comparée à celle qu'il y a de la baſe BC, à la baſe EF : c'eſt à dire, que ſi la baſe BC eſtoit le double de le baſe FE ; le triangle comparé au triangle DEF ſeroit deux fois le double ou le quadruple. La raiſon eſt que ſi le triangle ABC auoit la meſme hauteur, que le triãgle DEF, ſa baſe étant double, il ſeroit ſeulement double, mais parce qu'outre cela, il a la hauteur double, il ſera deux fois double : faites donc que BC ſoit à l'égard de EF, le meſme que

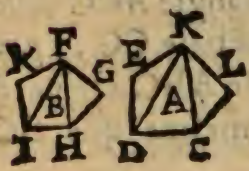
EF à l'égard de CG : (*par l'onz.*) je dis que ABC, comparé à DEF, a vne raiſon qui eſt le double de celle de BC à EF, c'eſt à dire, qu'ABC, eſt comparé à DEF, ce qu'eſt BC, comparé à CG, tirez la ligne AG.

Demonſtration. Puiſque les angles C & F, ſont ſuppoſez égaux, BC eſt à EF, ce que EF eſt à CG : or ce que BC, eſt à EF, AC l'eſt à DF : doncques ce qu'eſt EF comparé à CG cela meſme l'eſt AC, comparé à DF ; enſuite les coſtez qui comprennent les angles égaux C, & F, ſont reciproques ; & (*par la* 15.) ils ſont égaux, maintenant le triangle ABC, a vne meſme raiſon comparé au triangle ACG, que la baſe BC comparée à la baſe CG, (*par la* 1.) doncques le triangle ABC à l'égard du triangle DEF ; eſt le meſme que BC comparé à CG.

PROPOSITION XX.

Theoreme.

Deux polygones semblables se peuuent diuiser en pareil nombre de triangles, qui leur seront homologues, & la raison de ces Polygones semblables, est double eu égard aux costez homologues.



Que l'on se propose les Polygones semblables A & B : je dis qu'on peust les diuiser en égal nombre de triangles semblables, & qui seront de semblables parties de leur tout. Pour le voir, tirez les lignes CK, KD ; HF, FD.

Demonstration, Puisque les polygones A, & B sont semblables, les angles L, & G, seront égaux (*par la 8. definition,*) & il y aura vne mesme raison de KL, &

LC que de FG, à GH ; c'eſt pourquoy les ttiangles KLC , FGH ſont equiangles (*par la 6.*) ainſi ie monſtreray que les triangles KED, FKI ſont auſſi ſemblables, & parce que tout l'angle C, eſt égal à tout l'angle H, & D à I, & que les angles LCK, & GHF, ſont égaux comme EDK & KIF ; les angles KCD, & KDC, ſeront égaux aux angles FHI, FIH: doncques tous les triangles ſont ſemblables.

Ie dis en ſecond lieu qu'ils ſont proportionnaux comparèz à leur tout.

Demonſtration. Puiſque les polygones ſont ſemblables ; il y aura vne meſme raiſon de LC, à CD, que de CH, à HI ; & en changeant (*ſelon la 16. du 5.*) la raiſon de LC, à CH, ſera la meſme que de CD, à HI : or le triangle KLC, comparè au triangle FGB, qui luy eſt ſemblable, à vne raiſon double eu égard à celle du côté LC; comparé au côté GH & le triãgle KCD, eſt auſſi au triãgle FHI, en raiſon double comparée à celle du coſté CD, au coſté HI ; doncques il y a vne meſme raiſon du triangle KLC, au triangle FGH, que du triangle KCD, au

triangle FHI, par la mesme voye, ie monstreray qu'il y a encore vne mesme raison de KED, à FKI; c'est pourquoy (*par la* 12. *du* 5.) il y aura vne mesme raison de tous les triangles du polygone A, à tous ceux du polygone B, que du triangle A, à son correspondant B.

COROLLAIRE. I.

Il suit de cette proposition, que les polygones semblables sont en raison double, eu égard aux costez homologues, pârce qu'ils ont vne mesme raison, que les triangles semblables, lesquels (*par la* 19.) sont en cette raison.

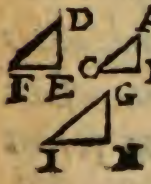
COROLLAIRE II.

S'il y a trois lignes continuellement proportionnelles, la raison qu'il y aura de la premiere à la troisiéme, sera la méme d'vn polygone descrit sur la premiere, à vn polygone semblable décrit sur la seconde : car ainsi ils seront en raison double comparés aux côtez homologues.

PROPOSITION XXI.

Theoreme.

Deux rectilignes semblables à vn troisiéme, le sont entre eux.



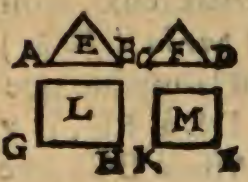
Faites que les rectilignes ABC, DEF, soient semblables au rectiligne GHI: je dis qu'ils seront semblables entre eux.

Demonstration. Chacun des angles A & D, est égal à l'angle G; doncques A & D sont égaux entre eux, ainsi des autres: & parce que (*par la defin.* 8.) la raison de GH, à HI, est la mesme que de AB, à BC, & que de DE à EF, il y aura vne mesme raison d'AB. à BC, que de DE, à EF; ie dis le mesme des autres costez; c'est pourquoy les rectilignes ABC, DEF, sont semblables (*par la definition* 8.)

PROPOSITION XXII.

Theoreme.

Si quatre lignes ſont proportionnelles : les polygones ſemblables que l'on décrira deſſus, ſeront proportionnaux ; & ſi les polygones ſemblables décrits deſſus quatre lignes ſont proportionnaux : les lignes ſeront proportionnelles.



Suppoſons qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AB, à CD, que de GH, à KI: je dis que ſi l'on décrit ſur AB, & ſur CD deux polygones ſemblables E & F, & ſur GH, & ſur KI, deux autres polygones ſemblables L, & M : il y aura vne meſme raiſon d'E à F que de L à M.

Demonſtration. La raiſon d'E à F, (*par le coroll. 2. de la 21.*) eſt double com-

parée à celle d'AB à CD, qui eſt la meſme que de GH, à KI, doncques la raiſon d'E à F eſt double, comparée à celle de GH à KI; de meſme la raiſon de L à *M*, eſt double comparée à celle de GH, à KI: Il y a doncques vne meſme raiſon d'E à F, que de L à M.

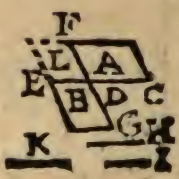
Ie dis en ſecond lieu, que s'il y a vne meſme raiſon d'E à F; que de L, à M; il y aura auſſi vne meſme raiſon d'AB, à CD; que de GH, à KI.

Demonſtr. La raiſon d'E à F, eſt double comparée à celle d'AB, à CD; & la raiſon d'E, à F; eſt la meſme que celle de L, à M; doncques la raiſon de L, à M, eſt double comparée à celle de AB, à CD: or elle eſt encore double comparée à la raiſon de GH, à KI; doncques il y a vne meſme raiſon d'AB à CD; que de GH, à KI.

PROPOSITION XXIII.

Theoreme.

Les parallelogrammes equiangles, ont vne raison composée, de celles de leur costez.



Que l'on se propose les parallelogrammes equiangles A & B: Ie dis que la raison d'A à B est composée de celles de CD à DE, & de celles de DE, à DG: c'est à dire, que H est l'égard d'I, ce que CD est à DE, & que FD est l'égard de DG, ce que I est l'égard de K; ainsi il y aura vne mesme raison d'A, à B; que de H, à K; que l'on conjoigne les parallelogrammes par les angles égaux, en sorte que les lignes CD, & DE soient vne mesme ligne; comme aussi FD, DG, ainsi que nous auons fait en la proposition 14. acheuez aussi le parallelogramme L.

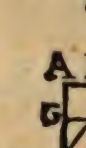
Demon

Demonſtration. Il y a vne meſme raiſon d'A, à L: (*par la* 1.) que de CD, à DE, c'eſt à dire de H, à I: il y a auſſi vne meſme raiſon de L, à B, que de FD, à DG: c'eſt à dire que de I, à K: doncques les trois quantitéz A, L, B, & les trois H, I, K, ont la meſme raiſon; c'eſt à dire que H eſt à l'égard d'I, ce que A, eſt à l'égard de L, & que L eſt à l'égard de B ce que I eſt à l'égard de K: doncques (*par la* 22. *du* 5.) il y a vne meſme raiſon d'A à B, que de H, à K.

PROPOSITION XXIV.

Theoreme.

En toute sorte de parallelogrammes, les parallelogrammes par lesquels passe vn mesme diametre, sont semblables entre eux, & au parallelogramme total.



Ie suppose qu'au parallelogramme AC, les parallelogrammes EF, GH, ayent vn mesme diametre; je dis qu'ils sont semblables, entre eux, & au parallelogramme AC qui est le total.

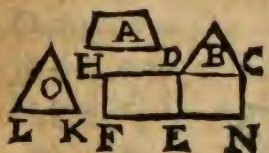
Demonstration. Les triangles BAD, & BEI; sont semblables: (*par la* 4.) ainsi ce qu'est BE à l'égard de EI, AB l'est à l'égard de AD: il en est de mesme des triangles BFI, & BCD: doncques les parallelogrammes EF, & AC, ont les angles égaux, & les costez proportionnaux, doncques (*par la* 8. *definition.*) ils sont

ſemblables ; j'en dis autant du parallelogramme GH, & (*par la* 21.) les parallelogrammes EF, & GH, ſont ſemblables entre eux.

PROPOSITION XXV.

Probleme.

La façon de décrire vn rectiligne ſemblable, & égal à vn autre.



Si l'on doit décrire vn rectiligne égal au rectiligne A, & ſemblable au rectiligne B, faites ſur CD vn parallelogramme CE, égal au rectiligne B (*par la* 34. *du* 1.) & ſur DE, faites vn parallelogramme DF, égal au rectiligne A, qui ayt vn angle égal à l'angle N (*par la* 45. *du* 1.) aprés cela cherchez entre CD & DH, la moyenne proportionnelle LK, ſur laquelle vous décrirez vn polygone O ſemblable à B (*par la* 18.) le dis que le

polygone O, est égal au polygone A.

Demonstration. Il y a vne mesme raison de BC, à LK, que de LK, à DH: doncques le rectiligne décrit sur CD, comparé au polygone décrit sur LK, a vne mesme raison que CD comparé à DH, (*par le corollaire 2. de la 20.*) or ce qu'est CD, à DH; DN, l'est à DF; ou le polygone B, au polygone A: ainsi ce qu'est le polygone B, au polygone A; le mesme polygone B, l'est au polygone O; doncques (*par la 9. du 5.*) A, & O sont égaux, & O & B sont semblables.

PROPOSITION XXVI.

Theoreme.

Si dans vn grand parallelogramme l'on en décrit vn plus petit, ſemblable au plus grand, qui ayt vn angle commun auec luy; le diametre du grand paſſe par les angles du petit.

Dans le parallelogramme AC, décrivez le petit DG, qui ayt le meſme angle D auecque luy, & qui luy ſoit ſemblable: je dis que le diametre B, doit paſſer par le poinct G, qui eſt l'angle de GD.

Demonſtration. S'il ne paſſe pas par G, ſuppoſons qu'il paſſe par I, en ſorte que le diametre fut la ligne BID: tirez par I, vne parallele à HD, en ſorte qu'on forme le parallelogramme DI, lequel deuroit eſtre ſemblable au parallelogramme AC (*par la* 24.) ainſi il y aura vne meſme raiſon de HD, à HI, que de

AD à AB, & puis qu'on suppoſoit que GD fuſt ſemblable à C, il y auroit vne meſme raiſon de AD à AB, que de HD à HG, donc il y auroit vne meſme raiſon de HD, à HG, que de HD à HI; & les lignes HI, & HG, ſeroient égales: c'eſt à dire que la partie égaleroit le tout, ce qui eſt impoſſible, doncques le diametre ne peuſt paſſer que par le poinct G.

Il faut laiſſer les propoſitions XXVII. XXVIII. XXIX.

PROPOSITION XXX.

Probleme.

La façon de diuiſer vne ligne en extreme, & moyenne raiſon.

Si l'on doit diuiſer la ligne AB, en extreme, & moyenne raiſon: c'eſt à dire, tellement qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AB à AC, que de AC à CB, diuiſez-la (*par la* 11. *du* 2.) en ſorte que le rectangle ſous AB,

& ſous BC, ſoit égal au quarré de AC: je dis que vous auez fait ce que vous deſirez.

Demonſtration. Puiſque le rectangle ſous AB, & ſous BC, eſt égal au quarré de AC, il y aura vne meſme raiſon (*par la* 17.) d'AB, à AC, que de AC à CB.

PROPOSITION XXXI.

Theoreme.

Aux triangles rectangles, le rectiligne décrit ſur la baſe, eſt égal aux deux rectilignes ſemblables décrits ſur les les autres coſtez.

Que l'on ſe propoſe le triangle rectangle ABC, dont l'angle droit ſoit BAC: je dis que le rectiligne D, décrit ſur la baſe BD, eſt égal aux rectilignes E, & F, ſemblables décrits ſur les coſtez AB, & AC.

Demonſtration. Les rectilignes F, E, D,

estant semblables ont (*par la* 20.) vne raison double comparée aux costez AB, AC & BC: que si au lieu de ces rectilignes l'on décriuoit sur les mesmes costez des quarrez, ils auroient aussi vne raison double comparée aux mesmes costez, doncques les rectilignes D, E, F, sont en mesme raison que les quarrez.: or (*par la* 47, *du* 1.) le quarré de la base, BC est égal aux quarrez de AB,& de AC: doncques le rectiligne D est égal, aux rectilignes F & E.

Qu'on laisse la proposition XXXII.

PROPOSITION XXXIII.

Theoreme.

Aux cercles égaux les angles tant ceux du centre, que ceux de la circonference ; ont vne-mesme raison que les arcs, qui leur sont opposez: les secteurs aussi ont vne mesme raison.

Supposons que les cercles ABC, & DEF soient égaux, & que les angles BGC, & EHK, soient aux centres : je dis qu'il y a vne mesme raison de l'arc BC à l'arc EK, que de l'angle BGC, à l'angle EHK, que l'on diuise l'arc EK en autant de parties aliquotes que l'on voudra, comme EO, OF, FK : tirez les lignes HO, HK, puisque les arcs EO, OF, FK, sont égaux, les angles EHO,

CHF, FHK seront égaux (*par la 27.du 3.*) & ensuite chacun sera vne partie aliquote semblable de l'angle EHK : diuisons maintenant l'arc BC en autant de parties égales à EO qu'il se pourra, & ayant tiré les lignes CN, GM, GL, GI, &c. formons des angles égaux à ceux de l'autre cercle.

Demonstration. Puisque les parties aliquotes de l'arc EK, se trouuent autant de fois dans l'arc BC, que les semblables parties aliquotes de l'angle EHK, se trouuent dans l'angle BGC, non seulement en vne diuision ; mais encore en toutes celles que l'on peust imaginer : il y aura (*par la 5.def.du 5.*) vne mesme raison de l'arc EK, à l'arc DC, que de l'angle EHK, à l'angle BGC : de plus les angles EDK, & BAC, estant les moitiez des angles precedents auront vne mesme raison qu'eux : doncques ils auront vne mesme raison que les arcs opposez.

Il en faut dire de mesme des secteurs AGC, EHK : car les secteurs IGC, FHK, sont égaux ; puisque si l'on tiroit les lignes EO, BN, (qui manquent en la figu-

re) les triangles EHO BGN, seront tout à fait égaux, & les mesmes lignes EO, BN coupperoient (*par la 24. du 3.*) dans deux cercles égaux, des segments égaux, qui estant adjoustez à des triangles égaux formeroient des secteurs égaux: j'en puis dire autant de tous les autres petits secteurs: c'est pourquoy le secteur total EHK sera diuisé en parties aliquotes, qui se trouueront autant de fois dans le secteur BGC, que l'arc EO se trouue dans l'arc BC, ainsi les secteurs & les arcs auront vne mesme raison.

Nous obmettons le VII. VIII. IX. X. Liure d'Euclide, parce que presque toutes les Mathematiques se peuuent comprendre sans ces liures: & les autres qui sont absolument necessaires, n'en dependent point.

LIVRE ONZIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

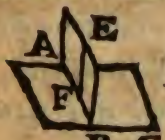
1. Vn ſolide eſt vne quantité qui outre la longueur & la largeur, a encore de l'épaiſſeur.

2. Les extremitez d'vn ſolide ſont les ſuperficies.

3. Vne ligne eſt droite, ou perpendiculaire à vn plan, quand elle eſt perpendiculaire à toutes les lignes, qui la couppent ſur ce plan : *Comme la ligne AB, ſera droite ou perpendiculaire au plan CD, ſi elle eſt perpendiculaire à toutes les*

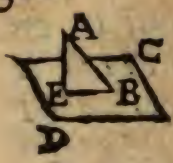
ler lignes qui passent par le poinct B, & qui sont tirées sur le plan CD; en sorte que les angles ABE, ABF, ABG, ABH soient angles droicts.

4. Vn plan est droict, ou perpendiculaire à l'autre, quand vne ligne tirée sur vn des plans estant perpendiculaire ou droite à la commune section des deux plans l'est de mesme à l'autre plan.

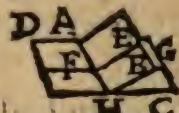


Nous appellons commune section de deux plans, vne ligne tellement commune aux deux plans, qu'elle se trouue en tous deux, ainsi la ligne AB, est autant du plan AC, que du plan AE. si doncques la ligne, FE estant tirée sur le plan BE, perpendiculairement à la commune section AB, est perpendiculaire au plan AC; le plan AE sera droict & perpendiculaire au plan AD.

5. Si la ligne AB, n'est pas droite sur le plan CD, & que de l'vn de ces poincts, pris hors du plan CD, ayant tiré la ligne AE perpendiculaire au mesme plan. vous fassiez la ligne EB, l'angle ABE, est l'inclination de la ligne AB.



6. L'inclination d'vn plan ſur vn autre plan, eſt l'angle aigu que renferment deux lignes tirées ſur les deux plans, & perpendiculaires à leur commune ſection.

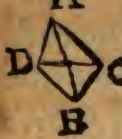


Ainſi l'inclination du plan AB ſur le plan CD, eſt l'angle EFG, *renfermé dans les lignes EF, FG; chacune deſquelles eſt perpendiculaire à la ligne AH, commune ſection des deux plans.*

7. Les plans ſont également inclinez, quand les angles d'inclination ſont égaux.

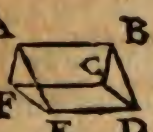
8. Les plans paralleles ſont ceux qui eſtant alongés autant que l'on voudra, ſeront touſiours également éloignez l'vn de l'autre.

9. Les figures ſolides ſemblables, & égales, ſont celles qui ſont compriſes ſous tout autant de plans, ſemblables, & égaux, en ſorte que ſi l'on s'imagine qu'elles ſe penetrent, l'vne n'excede pas l'autre: puis qu'elles ont les angles, & les coſtez égaux.



10 Vn angle solide ; est l'inclination de plus de deux lignes qui sont en diuers plans : *comme l'inclination des lignes AB AC, AD, qui sont en diuers plans.*

12. Vne Pyramide est vn corps solide composé de plusieurs triangles, dont les bases sont sur le méme plan, & qui ont le mesme sommet, comme la figure ABCD.



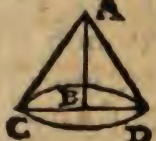
13. Le Prisme est vne figure solide, dont les deux plans opposez sont non seulement semblables. mais encore paralleles & égaux, & qui ayant ses autres plans parallelogrammes, peut auoir ses costez opposez polygones de quelque sorte que ce soit; mais pourtant tousiours paralleles, comme la figure ABCDEF.

14. Vne Sphere est vne figure solide, qui n'a qu'vne seule superficie, & dont toutes les lignes sont égales, estant tirées de cette superficie jusques à vn poinct du milieu : *ou si vous voulez comme les autres la definissent, la Sphere est la circonuolution d'vn demi-cercle autour d'vn diametre immobile.*

15. L'axe eſt la ligne immobile, autour de laquelle le demi-cercle ſe meuſt.

16. Le centre de la ſphere, eſt le meſme que le centre du demi-cercle : c'eſt à dire de cette moitié de cercle, par le mouuement de laquelle la ſphere ſe forme.

17. Le diametre de la ſphere, eſt quelque ligne que ce ſoit, qui paſſant par ſon centre, eſt terminée à la ſuperficie de la ſphere.



18. Si vne ligne tirée d'vn poinct placé hors du plan d'vn cercle fait le tour de la circonference de ce cercle, elle décrira vn cone : *Comme ſi la ligne AC demeurant immobile au poinct A roule autour de la circonference du cercle CD, elle decrira vn cone, dont le ſommet ſera le poinct A, hors du plan CD, la baſe ſera le cercle CD : l'axe la ligne AE, tirée du ſommet au centre du cercle.*

19. Si vne ligne ſe meuſt autour de deux cercles égaux, & paralleles, en ſorte qu'elle demeure touſiours parallele à la ligne tirée d'vn centre à l'autre,

elle décrira vn cylindre. La ligne tirée d'vn centre, à l'autre s'appellera l'axe, comme AB.

20. Les cones, & cylindres semblables, & droicts (j'appelle droicts quand l'axe est perpendiculaire à la base) sont ceux dont les axes ont vne mesme raison aux diametres de leur base.

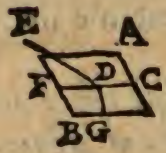
Pour les inclinez, il faut adjouster que les axes, doiuent auoir vne mesme inclination sur leurs bases.

La difficulté de ce liure consiste en ce que nous sommes obligez de faire des figures, sur le mesme plan de nostre papier, encore que nous deuions representer des corps, qui ont diuers plans, ainsi nous sommes contraints de les faire voir comme en perspective : de là vient que souuent les lignes, & les angles sont representez plus petits ou plus grands qu'ils ne sont en effet.

PROPOSITION I.

Theoreme.

Vne partie d'vne ligne, n'eſt pas dans vn plan, & l'autre hors du plan.



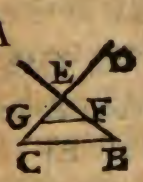
I'ay marqué de CD vne partie d'vne ligne qui ſe rrouue dans le plan AB : ie dis que le reſte de la ligne ne peuſt eſtre hors du plan, comme ſeroit DE.

Demonſtration. Il eſt certain que dans le plan AB, il y a vne ligne directement oppoſée à CD, en ſorte qu'elle compoſe vne ligne droite auec elle : (car ayant tiré la ligne DG, nous pouuons faire que les angles GDC, GDF ſoient égaux à deux droicts) pour lors les deux lignes DC, DF, ne feront qu'vne meſme ligne, (*par la* 14. *du* 1.) ainſi les deux lignes ED, FD, auroient le meſme ſegment DC commun, *contre le* 10. *axiome*.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Si deux lignes se couppent, elles seront dans le mesme plan, & tout triangle est dans le mesme plan.



Aux deux lignes AB, & CD, qui se rencontrent au poinct E, j'adiouste la ligne BC, & forme le triangle EBC; je dis que tout le triangle EBC, & les lignes AB, & CD sont dans le mesme plan.

Demonstration. S'il se pouuoit faire que la partie BCGF du triangle EBC, fust dans vn plan, & l'autre partie GEE fust dans vn autre plan, il faudroit que les parties CG, & BF des lignes EC, & EB fussent dans vn plan, & les autres parties EG, & EF fussent hors du plan, (*contre la* 1.) par la mesme raison AE, & ED qui sont le reste des lignes AB, & CD, se trouuent dans le plan du triangle BCE.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Si deux plans ſe couppent, l'vn l'autre, leur commune ſection eſt vne ligne droite.

Les plans AB, & CD ſe couppent l'vn l'autre, & leur commune ſection eſt EF; je dis que EF eſt vne ligne droicte.

Demonſtration. Si EF n'eſtoit pas vne ſeule ligne droite, tirez-en vne autre ſur le plan AB du poinct E, au poinct F, paſſant par le poinct G: tirez-en vne ſeconde ſur le plan CD, paſſant par le poinct H: ces deux lignes ne peuuent eſtre la meſme; ainſi elles ne peuuent eſtre vne commune ſection, & elles ne peuuent eſtre droites: car (*par le* 10. *axiome*,) deux lignes droites ne peuuent former entieremẽt vn eſpace. Il faut donc dire que la commune

section de ces deux plans ne fait qu'vne ligne, & que cette ligne est droite.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Si vne ligne est prrpendiculaire à deux lignes qui se couppent sur vn plan, elle sera droite au plan de ces deux lignes.

La ligne AB est perpendiculaire à deux lignes CD, & EF, qui se couppent au poinct B; en sorte que les angles ABC, ABD, ABE, & ABF sont angles droicts (*ce qu'vne figure plate n'exprime pas assez*) je dis que la ligne AB est perpendiculaire au plan GH, sur lequel sont les lignes CD, & EF; c'est à dire, que si l'on tire la ligne KL, ou quelqu'autre qu'il vous plaira par le poinct B, la ligne AB luy sera perpendiculaire, & les angles ABK,

ABL ſeront droicts. Pour le voir, coupez quatre lignes égales BC, BD, BE, BF, & imaginez-vous que l'on tire les lignes AC, AK, AF, AE, AL, AD.

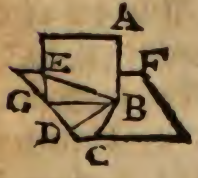
Demonſtration. les triangles ABC, ABD, ABE, ABF ayant le coſté AB commun, leurs coſtez BC, BD, BE, BF, étant égaux, & les angles au poinct B eſtant droicts, les baſes AC, AD, AE, AF, ſont égales (*par la* 4. *du* 1.) de plus les triangles CBF; & EBD ayant chacun deux coſtez égaux BC, & BF; BD, & BE, & les angles CBF, DBE qui ſont oppoſez eſtant égaux; (*par la* 15. *du* 1.) les baſes CF, ED, ſeront égales, & les angles BED, BFC égaux : adjouſtez à cela qu'aux triangles KBF, EBL, les angles oppoſez EBL, & KBF, eſtant égaux; de meſme que les angles BEL, BFK, & les coſtez FB, & BE; les coſtez EL, KF; LB, KB ſeront égaux (*par la* 26. *du* 1.) outre cela, puis qu'aux triangles ACF, & AED, les coſtez AC, AF; AE, AD ſont égaux, & que les baſes CF, ED ſont égales, les triangles ſeront égaux en toute façon (*par la* 8. *du* 1.) & les angles AED, AFC ſeront égaux; de

plus aux triangles AEL, & AFK, les côtez AE, AF; EL, FK, estant égaux de mesme que les angles AEL, & AFK, les bases AK, AL, seront égales (*par la 4. du 1.*) Enfin aux triangles ABK, & ABL les costez AK, AL; KB, BL estant égaux, les angles ABK, & ABL le seront (*par la 8. du 1.*) de tout cela il resulte que AB est perpendiculaire à KL.

PROPOSITION V.

Theoreme.

Si vne ligne est perpendiculaire à trois autres qui se couppent au mesme poinct : ces trois lignes sont dans le mesme plan.



Ie suppose que la ligne AB soit perpendiculaire, aux trois lignes BC, BD & BE; ie dis que ces trois lignes sont dans le mesme plan.

Demonstration. Le plan AE, est ce-

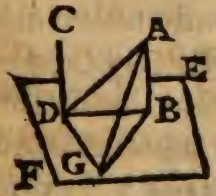
luy dans lequel ſont les lignes AB, BE, & que le plan FC, eſt celuy ou ſont les lignes BC, BD : je dis que BE eſt la commune ſection des plans AE, FC, & par conſequent que AE ſe trouue dans le plan FC : car ſi FE n'eſtoit pas la commune ſection de ces deux plans : ſuppoſons que ce ſoit BG ; puiſque la ligne AB, eſt perpendiculaire aux lignes BD, & BC (*par la precedente*) elle ſera perpendiculaire au plan FC, & (*par la definition* 3.) elle ſera perpendiculaire à BG ; doncques l'angle ABG ſeroit droit : pourtant l'angle ABE eſtoit ſuppoſé droit, ainſi les angles ABE, & ABG ſeroient égaux ; ce qui ne ſe peuſt, l'vn eſtant vne partie de l'autre, il n'y a doncques point d'autre commune ſection que BE qui enſuite ſera dans le plan FC.

PROPO

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Deux lignes perpendiculaires au meſme plan, ſont paralleles.



Si les lignes AB, & CD, ſont perpendiculaires au meſme plan EF ; je dis qu'elles ſont paralleles : Pour le voir, tirez la ligne BD ; puiſque les angles ABD, & CBD ſont droicts, (*par la definition 3.*) les lignes AB, & CD, ſeront paralleles, (*par la 29. du 1.*) pourueu que nous prouuions qu'elles ſont dans le meſme plan : pour cela, tirez la ligne DG perpendiculaire à la ligne BC, & égale à la ligne AB ; tirez auſſi les lignes AD, AG, BG.

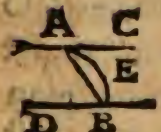
Demonſtration. Les triangles ABD, BDG, ont le coſté BD commun, & les coſtez AB, & DG, égaux, les angles ABD, BDG ſont droicts, & enſuite

égaux, doncques (*par le* 4. *du* 1.) les baſes AD, & BG ſont égales ; de plus aux triangles ADG, & ABG, la baſe AG eſt commune, les coſtez AB, & DG ſont égaux de meſme que les coſtez AD, & BG ; doncques (*par la* 8. *du* 1.) les angles ABG, ADG ſont égaux ; l'angle ABG eſt droict (*par la* 3. *def.*) doncques ADG ſera droit ; CDG, & BDG ſont encore droits : doncques la ligne DG eſt perpendiculaire aux trois lignes CD, AD, BD, leſquelles (*par la precedente*) ſont dans le meſme plan, or dans le plan des lignes AD, & BD ſe trouue auſſi AB (*par la* 2.) doncques AB, & CD ſont dans le meſme plan, & les angles ABD, & ADB eſtant droits elles ſeront paralleles.

PROPOSITION VII.

Theoreme.

La ligne qui conioint deux paralleles, eſt dans le meſme plan où elles ſont.



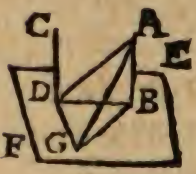
Vne ligne conjoint en deux poincts A & B, deux lignes paralleles AC & BD; je dis que la ligne AB eſt dans le meſme plan, où ſont les paralleles.

Demonſtration. Si la ligne AB n'eſt pas dans le plan de ces paralleles qu'on tire dans ce plan, vne autre ligne des mémes poincts A & B, paſſant par le poinct E, ſi cette nouuelle ligne n'eſtoit pas vne meſme ligne que la premiere, & que pourtant elle fuſt droite, deux lignes droites renfermeroient vn eſpace (*ce qui eſt contre l'ax.* 12.) doncques on ne peuſt tirer dans ce plan d'autre ligne que AB.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

Si vne des paralleles eſt perpendiculaire à vn plan, l'autre ſera perpendiculaire au meſme plan.



Les lignes AB, & CD ſont paralleles, ſi AB, eſt perpendiculaire au plan EF; je dis que CD l'eſt auſſi. Pour le voir, tirez la ligne DG égale à AB, & perpendiculaire à BD, & faites les lignes AD, AG, BG.

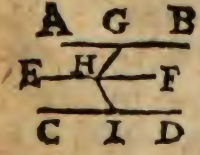
Demonſtration. Les lignes AB & CD eſtant paralles ſont ſur le meſme plan, où (*par la precedente*) ſe trouue CD; or dans le plan des lignes AB, & BD ſe trouue auſſi AD (*par la* 2.) & dans les triangles ABD, & BDG le coſté BD eſt commun, AB, & DG, ſont égaux, les angles ABD, & BDG ſont droits; doncques (*par la* 4. *du* 1.) les baſes AD, & BG

ſont égales : les triangles ADG, & ABG, ont le coſté AG commun, AD, BG ſont égaux, enſuite (*par la* 8. *du* 1.) l'angle ADG, eſt égal a ABG, qui eſt droict (*par la* 3. *definition*) doncques les angles ADG, BDG eſtant droicts, la ligne DG eſt perpendiculaire au plan ABDC, & l'angle GDC eſt droit : (*par la* 4.) ainſi les angles CDB, CDG eſtant droits la ligne CD, eſt perpendiculaire au plan EF, (*par la meſme.*)

PROPOSITION IX.

Theoreme.

Deux lignes paralleles, à vne troiſiéme, quoy qu'elles ſoient en des plans diuers, ſont paralleles entre elles.



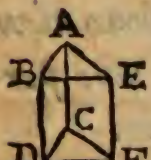
Les lignes AB, & CD ſont paralleles, à la ligne EF; & quoy que toutes trois ne ſoyent pas dans le meſme plan : je dis que les lignes

AB, & CD ſont paralleles entre elles. Pour le voir, tirez ſur le plan des lignes AB, & EF, la ligne GH perpendiculaire à toutes deux, & ſur le plan des lignes EF, CD, la ligne HI, auſſi perpendiculaire à toutes deux.

Demonſtration. La ligne EH, eſtant perpendiculaire aux lignes HI, & HG, ſera perpendiculaire au plan que l'on peuſt tirer par HG, & par HI: (*par la* 4.) doncques (*par la* 8.) les lignes AG & CI qui luy ſont paralleles, ſont perpendiculaires au plan, & (*par la* 6.) elles ſont paralleles entre elles.

PROPOSITION X.

Si deux lignes qui se couppent, sont paralleles à deux autres, encore que dans vn autre plan; les angles qu'elles feront, seront égaux.



Faites que la ligne AB soit parallele à CD; & AE, à CF, encore que ce soit en diuers plans; je dis que les angles, BAE, DCF sont égaux. Pour le voir, les lignes AB, CD; AE, & CF, estant égales, que l'on tire les lignes AC, BD, EF, BE, & DF.

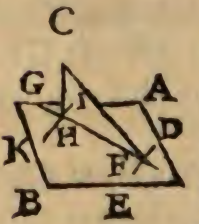
Demonstration. Les lignes AB, & CD, estant paralleles, & égales, les lignes BD, & AC seront paralleles, & égales (*par la 33. du 1.*) de plus, les lignes AE, & CF estant égales, & paralleles, les lignes AC & EF, seront paralleles & égales; les lignes BD, & EF, paralleles & égales à vne troisiéme AC, le seront entre elles (*par la 9.*) doncques BD, & DF, seront

égales. Enfin les triangles ABE, & CDF, ayant tous les coſtez égaux (*par la* 8. *du* 1.) les angles BAE, & DCF ſeront égaux.

PROPOSITION XI.

Probleme.

Quel moyen il faue tenir pour d'vn poinct hors du plan, tirer vne perpendiculaire au meſme plan.



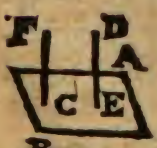
Que l'on ſe propoſe le plan B, & le poinct C, d'ou il faille tirer vne perpendiculaire ſur le plan, tirez la ligne DE, à laquelle du poinct C vous tirerez la perpendiculaire CF, par le poinct F, tirez dans le plan AB la perpendiculaire FG, à laquelle du poinct C, vous tirerez vne perpendiculaire CH; je dis que HC eſt perpendiculaire au plan CD. Pour le voir, tirez HI parallele à ED.

Demonſtration. La ligne EF eſt perpendiculaire à CF, comme auſſi FG: doncques FE eſt perpendiculaire au plan du triangle CFH (*par la* 4.) & KH qui luy eſt parallele, ſera auſſi perpendiculaire au meſme plan (*par la* 8.) doncques l'angle KHC eſt vn angle droict: or l'angle CHF eſt auſſi droict, enſuite (*par la* 4.) la ligne CH, eſt perpendiculaire au plan.

PROPOSITION XII.

Probleme.

Comment l'on peut d'vn poinct aſſigné dans le plan, tirer vne perpendiculaire au meſme plan.



Si l'on doit tirer du poinct C, vne perpendiculaire au plan AB; tirez du poinct D, la perpendiculaire DE (*par la* 11.) à laquelle vous tirerez vne parallele CF (*par la* 21. *du* 1.) Ie dis que CF

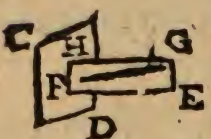
eſt perpendiculaire à AB.

Demonſtration. Les lignes CF, & DE ſont paralleles, & DE eſt perpendiculaire au plan AB; doncques (*par la* 8.) CF eſt perpendiculaire au meſme plan AB.

PROPOSITION XIII.

Theoreme.

Du meſme poinct, pris dans le plan, ny du meſme poinct hors du plan, l'on ne peut tirer deux perpendiculaires au meſme plan.



Du poinct F dans le plan DC l'on ne tirera pas deux perpendiculaires : ſuppoſons qu'il y en eut deux tirées FG, & FE, & qu'elles fuſſent perpendiculaires s'il ſe pouuoit au plan HE où elles ſont.

Demonſtration. Les Angles GFH, EFH ſeroiẽt droits (*par la def.* 3.) & égaux; quoy que l'vn ſoit partie de l'autre.

Ie dis encore que du meſme poinct G, pris hors du plan CD, on ne peuſt tirer deux perpendiculaires au meſme plan; telles que ſeroient GF, GH. Pour le voir, tirez la ligne FH.

Demonſtration. dans le triangle GFH il y auroit deux angles droits GFH, GHF, (*contre la* 17. *du* 1.)

PROPOSITION XIV.

Theoreme.

Les plans auſquels la meſme ligne eſt perpendiculaire, ſont paralleles.

Suppoſons que la ligne EF ſoit perpendiculaire aux plans AB, & CD; je dis que les plans AB, & CD ſont paralleles: tirez la ligne GH, parallele à FE, & les lignes GE, & HF.

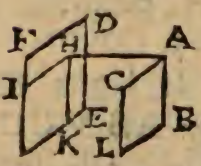
Demonſtration. Puiſque la ligne FE eſt perpendiculaire aux plans AB, & CD, & que GH luy eſt parallele, elle ſera

aussi perpendiculaire aux deux plans (*par la* 8.) ainsi (*par la definition* 3.) les angles FEG, HGE GHF, HFE, seront droits, & (*par la* 28. *du* 1.) les lignes HF, & GE seront paralleles: doncques GHFE est vn parallelogramme, où (*par la* 34. *du* 1.) les costez HG, FE, sont égaux, ensuite aux poincts G & H les plans sont également distants, je montreray de mesme façon, qu'ils sont également distants en tout autre endroit; doncques ils sont paralleles.

PROPOSITION XV

Theoreme.

Si deux lignes vnies en vn poinct, sont paralleles à deux autres, qui ne sont pas dans le mesme plan; les plans tirez par ces lignes, sont paralleles.



Les lignes AB, & AC, sont paralleles à ces deux lignes FD, & DE qui sont dans vn autre plan, je dis que les plans AL, & DI sont paralleles:

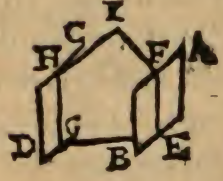
leles : tirez du poinct A la ligne AH perpendiculaire au plan DI, & (*par la* 30. *du* 1.) tirez les lignes HI, HK, paralleles à FD, & DE : qui (*par la* 9.) seront paralleles aux lignes AB & AC.

Demonstration. Puisque les lignes AC, HI, sont paralleles, les angles AHI, HAC seront égaux à deux droicts, (*par la* 29. *du* 1.) or l'angle HIA, est droict ; doncques HAC sera droit ; je prouueray de mesme façon, que HAB est droit : ainsi (*par la* 4.) la ligne HA est perpendiculaire au plan AL, elle est aussi perpendiculaire au plan DI ; en suite (*par la* 14.) les plans AL, & DI sont paralleles.

PROPOSITION XVI.

Theoreme.

Si deux plans paralleles, ſont couppez par vn troiſiéme & meſme plan ; les communes ſections ſont paralleles.



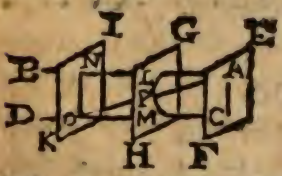
Les deux plans paralleles AB, & CD ſont couppez par le plan FG: je dis que les communes ſections HG, & FE ſont paralleles.

Demonſtration. Si elles ne ſont pas paralleles ; ſuppoſons qu'elles s'vniſſent au poinct I, puiſque les lignes FE, & GH ſont chacune dans leur plan, & n'ont aucun poinct qui en ſoit dehors, le poinct I ſera dans les deux plans : doncques les plans concourent, & ne ſont pas paralleles contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XVII.

Theoreme.

Deux lignes couppées par des plans paralleles ſont couppées proportionnellement.



Les lignes AB,& CD ſont couppées par les plans paralleles EF, GH & IK, aux poincts A,C,L,M,N,O : je dis qu'elles ſont couppées proportionnellement ; je veux dire qu'il y a vne meſme raiſon d'AL à LN, que de CM à MO. Pour le voir,tirez la ligne AO, qui coupera le plan GH,au poinct P ; faites enſuite les lignes AC, NO : & que les communes ſections des plans EF, & GH, & du plan du triangle ACO ſoient les lignes AC, & PM ; qui ſeront paralleles (*par la* 16.) de meſme que les lignes NO, & LP, eſtant les communes ſections des plans paralleles GH, & IK, & du plan du triangle AON.

Demonſtration. Au triangle AOC, la ligne PM eſtant parallele à la ligne AC, il y aura vne meſme raiſon de CM, à MO; que de AP, à PO: de plus il y aura vne meſme raiſon d'AL, à LN que de AP à PO: doncques il y a vne meſme raiſon de CM, à MO; que de AL, à LN.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

Si vne ligne eſt perpendiculaire à vn plan, tous les plans tirez par cette ligne, ſeront perpendiculaires au meſme plan.

Ie ſuppoſe que la ligne AB eſt perpendiculaire au plan CD; je dis que tous les plans tirez par AB; c'eſt à dire, tous les plans, où ſera la ligne AB, tels que paroit le plan FI ſeront perpendiculaires au plan CD; je veux dire (*ſelon la 3. definition*) que la ligne

IH perpendiculaire à GF commune ſection des deux plans, ſera perpendiculaire au plan CD.

Demonſtration. La ligne AB eſtant perpendiculaire au plan CD, l'angle ABG ſera droict (*par la 3. definition*) & puiſque la ligne HI eſt perpendiculaire à la ligne HB, l'angle IHB ſera droict; doncques les lignes AB, & HI (*par la 28. du 1.*) ſeront paralleles, & AB eſtant perpendiculaire au plan CD, la ligne IH (*par la 8.*) ſera perpendiculaire au méme plan.

PROPOSITION XIX.

Theoreme.

Si deux plans ſe couppent, & ſont perpendiculaires à vn troiſieſme : Leur commune ſection ſera perpendiculaire au meſme plan.

Ie ſuppoſe que les plans AB, & CD ſont perpendiculaires au plan EF ; je dis que GH, commune ſection de ces deux plans, eſt perpendiculaire au plan EF.

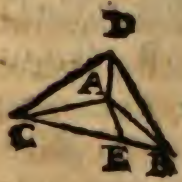
Demonſtration. La ligne GH, eſt perpendiculaire aux lignes BI, & GD ; car ſi cela n'eſtoit pas, que l'on tire ſur le plan AB, la ligne KG, ſi elle eſtoit perpendiculaire à BG, elle le ſeroit au plan EF, (*par la* 18.) tirez doncques GL ſur le plan CD, ſi elle étoit perpendiculaire à GD, elle le ſeroit au plan EF : enſuite l'on pourroit tirer par le meſme poinct G,

deux perpendiculaires au plan EF, ce qui eſt impoſſible (*par la* 13.) ainſi l'on ne pourra tirer que GH perpendiculaire aux deux lignes GD, & GI, & (*par la* 4.) elle ſera perpendiculaire au plan EF.

PROPOSITION XX.

Theoreme.

De trois angles plans, qui peuuent former vn angle ſolide; les deux plus petits pris enſemble, ſont toûjours plus grands que le troiſiéme, quelque grand qu'il ſoit.



Que l'on ſe propoſe trois angles plans BAC, BAD, DAC, qui forment vn angle ſolide A, que le plus grand de tous, ſoit BAC: je dis que les deux autres mis enſemble ſont plus grands que luy. Pour le voir, faites

l'angle CAE égal à l'angle CAD, & que les lignes - E, & AD ſoient égales, tirez les lignes BEC, BD, BC.

Demonſtration. dans les triangles CAD, CAE, le coſté AC eſtant commun, les coſtez - D, & AE eſtant égaux de meſme que les angles CAD & CAE les baſes CE, & CD ſeront égales (*par la 4. du 1.*) or les coſtez du triangle BDC marquez de BD, & de DC ſont plus grands (*par la 20. du 1.*) que le coſté B C; doncques oſtant CD, & CE, qui ſont égaux, il reſtera que BD eſt plus grand que BE; adjouſtez à cela que les triangles BAD, & BAE, ayant le coſté BA commun, leurs coſtez AD, & AE eſtant égaux, & la baſe BD eſtant plus grande que la baſe BE, l'angle BAD ſera plus grand que BAE (*par la 25. du 1.*) auſquels ſi vous adjouſtez CAE, & CAD qui ſont égaux; CAD & DAB, ſeront plus grands que le ſeul GAB.

PROPOSITION XXI.

Theoreme.

Tous les angles qui composent vn angle solide, sont moindres que quatre droits.

Proposez-vous l'angle solide A, composé des angles DAC, CAB & DAB; je dis que tous ces angles sont plus petits que quatre droits. Pour le voir, si c'est vn angle composé de trois, faites vn triangle BCD.

Demonstration. Il se forme des angles solides aux poincts B,C D dont les deux sont plus grands que l'autre. par exemple au poinct B les angles ABD, & BC sont plus grands que l'angle DBC (*par la precedente.*) or tous les angles du triangle DBC sont esgaux à deux droits, (*par la 32. du* 1.) doncques les 6. angles ACB, ACD ABC, ABD A B, ADC sont plus grands que deux droits; adjoustez que tous les angles des 3. triangles ADC, ACB, ABD valent 6. droits, desquels

ſi vous retranchez plus de deux dr oits, il en reſtera moins de quatre droits, pour ceux qui compoſent l'angle A.

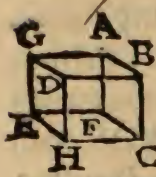
Le meſme ſe peuſt prouuer, encore qu'il y euſt plus de trois angles qui compoſaſſent l'angle A.

Qu'on laiſſe les propoſitions XXII. XXIII.

PROPOSITION XXIV.

Theoreme.

Si vn ſolide eſt composé de plans paralleles, les plans oppoſez ſeront des parollelogrammes ſemblables, & égaux.



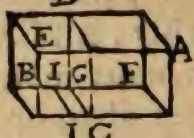
Le ſolide AH eſt compoſé de plans paralleles; je dis que les plans oppoſez, ſont parallelogrammes ſemblables, & égaux.

Demonſtration. Les plans BG, & CE ſont couppez par le plan AC; doncques

les communes sections AB, & CF sont paralleles (*par la* 16.) de plus, parce que les plans paralleles AE, & BH, sont couppez par le plan AC; les sections BC, & AF sont paralleles: AC est doncques vn parallelogramme; je prouueray de la mesme façon que DE est vn parallelogramme, & ainsi des autres; nous prouuons aussi que les angles des opposez sont égaux, comme en CE, & BG, parce que AB, & BD, estant paralleles à CF, & à CH, les angles ABD, & FCH (*par la* 10.) sont égaux; nous monstrons aussi que les costez des plans opposez sont égaux; car AB est égal à CF; puisque AC est vn parallelogramme, & ainsi des autres,

PROPOSITION XXV.

Si vn ſolide parallelepipede eſt diuiſé par vn plan parallele, aux plans oppoſez de ce ſolide; il y aura vne meſme raiſon de ſolide, à ſolide, que de baſe, à baſe.



Ie ſuppoſe que le ſolide AB, ſoit diuiſé par le plan CD, parallele aux plans oppoſez BE, & AF : je dis qu'il y a vne meſme raiſon du ſolide AG, au ſolide GE; que de la baſe CF, à la baſe CB.

Demonſtration. Suppoſons que CI ſoit vne partie aliquote de la baſe CB, ſi nous conceuions ſur la ligne I vn plan parallele à CD, on feroit vn parallelepipede qui ſeroit vne ſemblable partie aliquote du ſolide CE; car on pourroit ſur le reſte de la baſe former de ſemblables ſolides; ſi le parallelogramme CI ſe trouue quatre fois par exemple dans la baſe CF, nous

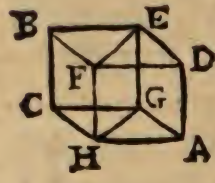
nous trouuerions autant de ſolides égaux dans le ſolide AG, & s'il ſe rencontroit plus de fois dans la baſe CF, nous trouuerions auſſi plus de fois le méme ſolide, dans le ſolide AG : ainſi puiſque les parties aliquotes de la baſe BC, ſe trouuent autant de fois dans la baſe CF, que ſemblable partie aliquote du ſolide GE, ſe trouue dans le ſolide AG, il y aura (*par la* 10. *definition du* 5.) vne meſme raiſon de la baſe BC, à la baſe CF, que du ſolide GE, au ſolide AG.

Qu'on laiſſe les propoſitions XXVI. & XXVII.

PROPOSITION XXVIII.

Theoreme.

Vn plan tiré ſur le diametre des plans oppoſez d'vn parallelepipede, le diuiſe par le milieu.



Que l'on ſe propoſe le parallelepipede AB, où les plans AC, & BD ſoient oppoſez, leur diametres ſeront HG & FE ; je dis que le plan FEGH diuiſe le ſolide par le milieu.

Demonſtration. DG eſtant vn parallelogramme, les lignes AD, & GE ſont paralleles (*par la* 34. *du* 1.) FH, & AD, ſont encor paralleles, & égales, & (*par la* 9.) FH, & HE le ſont de meſme, ainſi elles ſont dans le meſme plan ; (*par la* 33. *du* 1.) FG eſt vn parallelogramme;

les diametres HG, & FE, diuiſant les parallelogrammes AC, & BD en des triangles égaux (*par la* 24. *du* 1) Il ſe fait doncques deux priſmes BHE, AFG qui eſtant compoſez de triangles, & de parallelogrammes égaux; (*par la* 10. *definition*) ſeront égaux.

PROPOSITION XXIX.

Theoreme.

Les parallelepipedes, poſez ſur la méme baſe, & dans la meſme hauteur, deſquels les autres lignes aboutiſſent à la meſme ligne, ſont égaux.

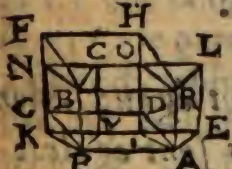
Les deux parallelepipedes ABCD, ABEF ont pour baſe le parallelogramme AB, & ont vne meſme hauteur; car ils ſont entre les deux plans paralleles AB, & DE, les autres lignes BC, & BE, aboutiſſent à la ligne IE; je dis qu'ils ſont égaux.

Demonſtration. Les parallelogrammes GBEH, & GBCI, ſont égaux (*par la 35. du 1.*) doncques ſi vous ſouſtraiſez le trapeze GBCH, les triangles BCE, & HGI ſeront égaux, comme auſſi DAF, & KLM. Les parallelogrammes CM, IF, GF, & BM, ſont auſſi égaux (*par la 24.*) doncques les priſmes BMC, & CFI, compris ſous des plans & ſous des angles plans égaux, ſont auſſi égaux (*par la 10. definition*) auſquels ſi vous adjoûtez le commun ſolide ABKH, les parallelepipedes, ABCD, & ABEF ſeront égaux.

PROPOSITION XXX.

Theoreme.

Les parallelepipedes qui ſont ſur la meſme baſe, & dans la meſme hauteur, ſont égaux.



I'ay poſé ſur la baſe AB, 2. perallelepipedes ABCE, ABFD qui ont meſme hauteur; car ils ſont entre deux plans paralleles, je dis qu'ils ſont égaux. Pour le voir, étendez les lignes FG, & GD, juſques à ce qu'elles couppent les lignes LC, & EM, aux poincts O, N, K, I; & tirez les lignes AI, IK, BN, NO; en ſorte que vous faſſiez le parallelepipede ABNI.

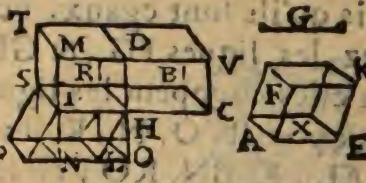
Demonſtration. Les parallelepipedes ABCD, ABNI ont toutes les conditions de la propoſition precedente; doncques ils ſont égaux, or les parallelepipedes

ABNI, & ABFD ont auſſi les meſmes conditions ; puiſque leur lignes aboutiſſent à la meſme ligne FK ; doncques ils ſont auſſi égaux ; enſuite les parallelepipedes ABCE, & ABFD ſont égaux entre eux.

PROPOSITION XXXI.

Theoreme.

Les parallelepipedes ſont égaux, dont la hauteur & les baſes ſont égales.



Ie ſuppoſe que les parallelepipedes AK, & BD ſont ſur des baſes égales, AK & BD, & ont vne hauteur égale G, car la ligne G eſt la diſtance qui ſepare les plans CD & EF de ceux qui leur ſont oppoſez. Pour voir ſi ces parallelepipedes ſont égaux : faites la ligne HI egale à la ligne KF ; & acheuez le parallelo-

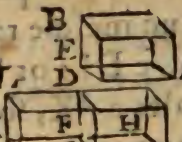
gramme IL, égal, & semblable au parallelogramme EF, acheuez aussi le parallelogramme HM; enfin, étendez les lignes DH, MI, iusques aux poincts N & O, les parallelogrammes HN, & HP seront égaux (*par la 14. du 1.*) acheuez enfin tous les parallelepipedes.

Demonstration. Le parallelepipede CB, a vne mesme raison, au parallelepipede HT, que la base DC à la base DI: (*par la 25.*) le parallelepipede OS, comparé au parallelepipede HT a vne mesme raison que la base OI, à la base DI: or les bases DC, & OI estant égales à AK, sont égales entre elles, & ensuite ont vne mesme raison à la base DI: doncques les parallelepipedes BD, & OS ont vne même raison à HT; ainsi ils sont égaux: (OS est égal à RP, (*par la 30.*) & RP, à EF, puis qu'ils sont compris sous des plans semblables & égaux, doncques les parallelepipedes EF, & BD sont égaux.

PROPOSITION XXXII.

Theoreme.

Les parallelepipedes de meſme hauteur ont vne meſme raiſon entre eux, que leur baſes entre elles.



Ie ſuppoſe que les parallelepipedes AB, & CD, ont vne meſme hauteur: je dis qu'il y a vne méme raiſon de la baſe AE, à la baſe CF; que du ſolide AB, au ſolide CD. Pour le voir, faites (*par la* 45. *du* 1.) ſur la ligne FG, vn parallelogramme FI égal au parallelogramme AE: en ſorte que l'angle GFI ſoit égal à l'angle CHF: c'eſt à dire que les lignes CG, & HF, compoſent vne ligne droite; enſuite acheuez le parallelepipede, CL: les parallelepipedes GL, & AB, auront vne meſme hauteur que

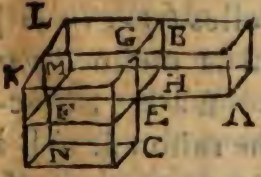
CD, doncques ils auront la meſme entre eux.

Demonſtration. Les parallelepipedes AB, & GL, (*par la* 31.) ſont égaux : or CD, & GL, (*par la* 25.) ont vne meſme raiſon entre eux, que la baſe CF comparé à la baſe GK, ou AE qui luy eſt égale, donques le parallelepipede CD, comparé à AB, aura vne meſme raiſon que la baſe CF, comparée à la baſe AE.

PROPOSITION XXXIII.

Theoreme.

La raiſon des parallelepipedes ſemblables eſt triple comparée à celle des coſtez homologues.



Les parallelepipedes AB, & CD, ſont ſemblables ; c'eſt à dire que les plans de l'vn ſont ſemblables aux plans de l'autre ; pour cela il eſt neceſſaire que

tous les angles ſoient égaux ; en ſorte qu'ils ſe puiſſent tellement poſer, que les lignes AE, GE, & HE de l'vn, faſſent vne ligne droite auec les lignes correſpondantes de l'autre.

Secondement, il faut qu'il y ayt vne meſme raiſon d'AE, à EH, que de FE, à EI, & de GE, à EC, que de AE, à EF: cela ſuppoſé, je dis que le ſolide AB, cõparé au ſolide CD, a vne raiſon triple, comparée à celle qu'il y a du coſté AE, au coſté homologue EF ; c'eſt à dire que ſi l'on acheue les parallelepipedes EL, & EK, je monſtreray qu'il y aura quatre quantitez dans la proportion continüée d'AE, & de EF, deſquelles le ſolide AB ſera la premiere, & CD la quatriéme

Demonſtration. Puiſque les parallelepipedes AB, & EL ont vne meſme hauteur, ils auront entre eux vne meſme raiſon que leurs baſes entr'elles (*par la 32.*) or la raiſon des baſes eſt la meſme (*par la 1. du 6.*) que celle de AE à EF, doncque il y aura vne meſme raiſon de AB à EL que de AE à EF. EL comparée à FK, a vne meſme raiſon que les baſes HE, &

ED, & la raiſon de celle-cy eſt la meſme que de HE à EI, ou de AE à EF : outre cela le ſolide EK, comparé à CD, a vne meſme raiſon que la baſe GF, comparée à EN, & la raiſon de celles-cy eſt la meſme que celle de la ligne CE, comparée à EC, qui eſt, encore la meſme que de AE, à EF : ainſi il y a quatre parallelepipedes, dont les raiſons ſont continuées du coſté AE au coſté EF, enſuite (*par la* 11. *du* 5.) la raiſon du parallelepipede AB, comparé au parallelepipede CD, ſera triple ſi on le compare à celle du coſté AE, au coſté homologue EF.

COROLLAIRE.

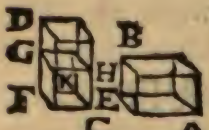
Si quatre lignes ſont continuellement proportionnelles, le parallelepipede décrit ſur la premiere, comparé à vn parallelepipede ſemblable décrit ſur la ſeconde, aura vne meſme raiſon que la premiere ligne comparée à la quatriéme : en ſorte que le probleme celebre qui propoſe de doubler vn cube, n'a de difficulté, que de trouuer dèux moyennes pro-

portionnelles entre deux lignes données.

PROPOSITION XXXIV.

Theoreme.

Les baſes, & les hauteurs des parallelepipedes égaux ſont reciproques; & ceux là ſont eſgaux qui ont les baſes & hauteurs reciproques.



Les deux parallelepipedes AB, & CD, ſont égaux, les lignes qui les compoſent ſont perpendiculaires à la baſe, & ſont la vraye hauteur des ſolides : je dis qu'il y a vne meſme raiſon, de la baſe AE, à la baſe CF, que de la hauteur DF, à la hauteur EB; retranchez de la hauteur FD, la hauteur FG, égale à la hauteur BE : & imaginez-vous que par le poinct G paſſe vn plan parallele à CF.

Demonſtration. Puiſque les parallelepipedes

pipedes AB, & CG, ont vne meſme hauteur, la raiſon d'AB à CG, ſera la meſme que de la baſe AE, à la baſe CF (*par la* 32.) or l'on ſuppoſe que AB eſt à l'égard de CG ce qu'eſt DF à l'égard de EB, ou de FG, & que DF eſt à l'égard de FG ce qu'eſt la baſe DK, à l'égard de baſe GK (*par la* 1. *du* 6.) & (*par la* 18.) le ſolide DC ou AB qui luy eſt égal comparé au ſolide GC aura vne meſme raiſon; doncques ce qu'eſt AB comparé à CD: DF l'eſt comparé à BE, enſuite il y a vne meſme raiſon de la baſe AE, à la baſe CF, que de la hauteur CF, à la hauteur AE.

La conſtruction demeurant la meſme, je dis que ſi les baſes, & les hauteurs ſont reciproques, les parallelepipedes AB & CD ſeront égaux.

Demonſtration. Il y a vne meſme raiſon d'AB, à CG, que de la baſe AE, à la baſe CF: or la raiſon qui eſt entre les baſes eſt la meſme entre les hauteurs FD, & EB, ou FG, & ce qu'eſt FD, à l'égard de FG, la baſe DK, l'eſt à l'égard de la baſe GK, (*par la* 1. *du* 6.) & (*par la* 25.)

DE a vne meſmeſme raiſon à GE, doncques il y aura vne meſme raiſon de CD, à GC, que de AB à GC, enſuite AB, & CD, ſeront égaux.

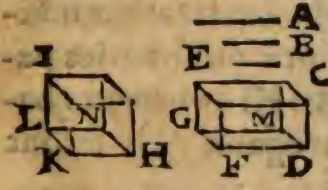
Que ſi deſſus les baſes AE, & CF, l'on s'imagine deux autres peralleleipedes de meſme hauteur que AB, & CD; encore que les lignes ne ſeroient pas perpendiculaires, ils leur ſeroient égaux, & auroient meſmes baſes & mémes hauteurs, ainſi les baſes, & les hauteurs ſeroient reciproques, & ſi les hauteurs & les baſes eſtoient reciproques, les paralleleipedes ſeroient eſgaux; car pour lors les parallelepipedes perpendiculaires ſeroient égaux, à ceux cy (*par la* 30.) enſuite ils le ſeroient entr'eux

Laiſſez la XXXV. comme inutile.

PROPOSITION XXXVI.

Theoreme.

Si trois lignes ſont continuellement proportionnelles, le parallelepipede fait de ces trois lignes eſt eſgal à vn parallelepipede fait ſur celle du milieu, & equiangle au premier.



Ie ſuppoſe que les trois lignes A, B, C, ſoiẽt cõtinuellemẽt proportionnelles, & que le parallelepipede DE ſoit compoſé de ces trois lignes, en ſorte que DF ſoit égale à A, GE à B, & FG à C : je ſuppoſe encore que le parallelepipede HI ayt les trois lignes HK, KL, LI égales à B : & qu'il ſoit equiangle à l'égard du premier ; je dis que DE, & HI ſont égaux.

Demonſtration. Puiſque les paralleloI i 2

grammes DG, & HL ſont equiangles, & que DF eſt égale à A, & FG à C, & KH à B, auſſi bien que LK : il y aura vne meſme raiſon de FD à KH, que de A, à B, & de LK, à GF que de B à C : doncques les coſtez ſont reciproques, & les parallelogrammes égaux (*par la* 15. *du* 6.) & parce que les angles ſolides G, & L ſont égaux par la ſuppoſition, ſi l'on mettoit G, en L, les angles ne s'excederoiét point l'vn l'autre, GE, & LI étant égales à B, le poinct E ſeroit ſur le poinct I, d'où ſi on tiroit vne perpendiculaire ſur le plan LH, ce ſeroit la hauteur commune ; enſuite puiſque les parallelepipedes DE, & HI, ont leurs baſes & leurs hauteurs égales, ils ſeront égaux (*par la* 31.)

PROPOSITION XXXVII.

Theoreme.

Si quatre lignes ſont proportionnelles: les parallelepipedes ſemblables décrits ſur elles ſeront preportionnaux: & ſi les parallelepipedes ſemb.ables décrits ſur quatre lignes ſont proportionnaux, elles ſont proportionnelles.

A B / C D

Ie ſnppoſe qu'il y ayt vne meſme raiſon d'A à B, que de C à D, je dis que ſi vous décriuez ſur A, & ſur B deux parallelepipedes ſemblables, & que ſur C, & ſur D, vous en décriuez deux autres auſſi ſemblables : ils ſeront proportionnaux.

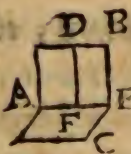
Demonſtration. La raiſon du ſolide qui eſt ſur A comparé au ſolide qui eſt ſur B eſt triple comparé à la raiſon d'A, à B

où de C à D, qui eſt la meſme: (*par la* 33.) la raiſon du ſolide qui eſt ſur C comparé au ſolide qui eſt ſur D eſt triple comparée à celle de C, à D ; doncques il y a vne meſme raiſon du ſolide qui eſt ſur A au ſolide qui eſt ſur B, que du ſolide ſur C au ſolide ſur D : & au contraire ſi les ſolides ſont proportionnaux les lignes ſeront proportionnelles, parce que le ſolide ſur A, eu égard au ſolide ſur B, a vne raiſon triple comparée à celle de A, à B, & le ſolide ſur C, eu égard au ſolide ſur D, a vne meſme raiſon ; doncques elle eſt triple, comparée à celle de A à B, or la raiſon eſt encore triple, comparée à celle de C à D, doncques il y a vne meſme raiſon d'A à B, que de C, à D.

PROPOSITION XXXVIII.

Theoreme.

Deux plans eſtant perpendiculaires l'vn à l'autre, ſi vous tirez d'vn poinct de l'vn vne ligne perpendiculaire à l'autre; elle tombera ſur la commune ſection des plans.



Les plans AB, & AC ſont perpendiculaires l'vn à l'autre; je dis que ſi du poinct D, au plan AB; vous tirez vne ligne perpendiculaire ſur le plan AC, elle tombera ſur la commune ſection AE. Pour le voir, tirez du poinct D vne ligne perpendiculaire à la commune ſection AE, qui ſoit DF.

Demonſtration. La ligne DF, (*par la 4. definition*) eſt perpendiculaire au plan AC: or l'on ne peuſt en tirer deux du meſme poinct D (*par la* 13.) doncques ſi

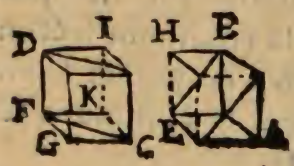
du poinct D, vous tirez vne ligne perpendiculaire au plan AC, elle tombera ſur la commune ſection AE.

Laiſſez la XXXIX.

PROPOSITION XL.

Theoreme.

Si deux Priſmes triangulaires, ont vne meſme hauteur, & que l'vn ayt vne baſe parallelogramme double de la baſe, triangulaire de l'autre, ils ſeront eſgaux.



Les priſmes AB, & CD, triangulaires ſont de meſme hauteur, AE, qui eſt la baſe d'AB eſt vn parallelogramme double de la baſe triangulaire CGF: je dis que ces priſmes ſont égaux. Pour le voir, imaginez-vous que

l'on a acheué les parallelepipedes.

Demonſtration. Puiſque la baſe AE, eſt double du triangle CGC,& que le parallelogramme GK eſt auſſi double du meſme triangle (*par la* 14. *du* 1.) les parallelogrammes AE,& GX ſeront égaux, & les parallelepipedes AH & CD, ayant leurs baſes,&leurs hauteurs égales,ſeront auſſi égaux : or les priſmes AB, & CD. ſont la moitié des parallelepipedes (*par la* 28.) doncques les priſmes ſont égaux.

COROLLAIRE.

De cette propoſition l'on peuſt facilemẽt prouuer que les priſmes, deſquels l'on prendra vn des plans oppoſez pour baſe; auront vne meſme raiſon que leurs baſes, & premierement on le demonſtre des triangulaires; car vous voyez que le priſme CGFD,eſt la moitié du parallelepipede de méme hauteur, & que ſa baſe eſt la moitié de celle du parallelepipede; doncques ſi vous le comparez à vn autre de meſme hauteur, il aura vne meſme raiſon, que ſon parallelepipede à l'autre pa-

rallelepipede, ils auront doncques vne meſme raiſon entr'eux, que les baſes; l'on peuſt auſſi prouuer la meſme choſe des priſmes, qui ont pour baſe vn plan polygone oppoſé, parce qu'il ſe peuſt reſoudre en priſme triangulaire.

LIVRE DOVZIEME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

PROPOSITION I.

Theoreme.

La raiſon des polygones ſemblables inſcrits dans vn cercle, eſt la meſme que celle qu'ont entr'eux les quarrez des diametres des cercles.

Ie ſuppoſe que les polygones ABCDE & FGHKL ſont ſemblables, & que les diametres des

cercles ſoient les lignes AM, & FN ; je dis que le premier polygone, comparé au ſecond, a vne meſme raiſon que le quarré du diametre AM, au quarré du diametre FN. Pour le voir, tirez les lignes AC,BM,FH.& GN.

Demonſtration. Les polygones eſtant ſemblables, les angles B, & G, ſeront égaux;&il y aura vne meme raiſon d'AB, à BC; que de FG, à GH : & les triangles ABC, FGH, ſeront equiangles (*par la 6. du 6.*) doncques les angles ACB,& FHG ſeront égaux : or ceux-cy eſtant egaux (*par la 21.du 3.*)aux angles AMB,&FNG; il s'enſuit que les triãgles FNG,& AMB; dont les angles ABN, AGN, dans le demi-cercles ſont droits ; ſeront equiangles, & (*par le 6.du 6.*) il y aura vne méme raiſon d'AB à AM, que de FG, à FN; & en changeant, il y aura vne meſme raiſon d'AB, à FG ; que de AN,à FM:doncques (*par la 22. du 6.*) le polygone ABCDE décrit ſur la premiere AB comparé au polygone ſemblable FGHKL décrit ſur la ſeconde FG, aura vne meſme raiſon, que le quarré décrit ſur la troiſieme

siéme AM, comparé à vn semblable quarré décrit sur la quatriéme FN.

LEMME.

L'on peut tracer dans vn cercle vn polygone regulier plus grand qu'vne quantité qui sera plus petite que ce cercle.

La quantité A est plus petite que le cercle B : je dis que l'on pourra inscrire vn polygone regulier dans le cercle B, qui sera plus grand, que la quantité A. Inscriués doncques dans le cercle le quarré CDEF, s'il est plus grand que la quantité A, nous auons ce que nous desirons; que s'il est plus petit, diuisez les arcs CD, DE, EF, & FC par le milieu, & tirez les lignes CH, HD; & les autres, en sorte que vous faſſiez vn octogone; s'il n'est pas plus grand que la quantité A, diuisez par le milieu les arcs de l'octogo-

ne, & vous ferez vn polygone de 16. cô-tez ; ſi cela ne ſuffit pas, faites-en vn de 32. coſtez, & ainſi conſecutiuement : ti-rez par le poinct H, vne tangente NO, & alongez les coſtez FC, & ED iuſques aux poincts N, O, & que G ſoit ce qui manque à la quantité A pour eſtre auſſi grande que le cercle B.

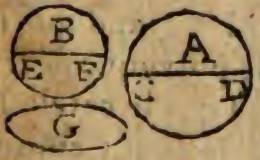
Demonſtration. Puiſque du cercle l'on a oſté le quarré qui eſt plus de ſa moi-rié, le quarré inſcrit eſtant la moitié de celuy qu'on décrit autour du cercle; & puiſqu'en faiſant l'octogone l'on oſte plus de la moitié de ce qui reſtoit ; c'eſt à dire des ſegments CHD, DIE, ERF, FLD, car l'on oſte les triangles : or le triangle CHD eſt la moitié du parallelo-gramme CDON, qui eſt plus grand, que le ſegment CHD ; ainſi le triangle eſt plus grand que la moitié du ſegment CHD, le meſme en eſt-il des autres ſeg-ments. Il en faut dire autant ſi l'on fait le polygone de 16. coſtez, l'on oſte la moitié du reſte, il en eſt de meſme des autres polygones ; Enfin, il reſtera vne quantité plus petite que G, doncques le

polygone laissant du cercle vne plus petite quantité, que G, qui est celle que laisse la quantité A, sera plus grand que la quantité A : ainsi l'on peust inscrire dans le cercle vn polygone plus grand que la quantité A.

PROPOSITION II.

Theoreme.

La raison des cercles est la mesme raison, que celle des quarrez de leur diametre.



Ie dis que le cercle A, comparé au cercle B, a vne mesme raison, que le quarré du diametre CD, comparé au quarré du diametre EF : si cela n'estoit pas, que le cercle A, par exemple eust vne plus grande raison, comparé au cercle B, que le quarré du diametre CD, comparé au quarré du diametre EF, vne quantité G plus petite que le cercle A, comparé au cercle B, auroit vne mesme

raiſon que le cercle A, au cercle B : l'on pourra doncques (*par le lemme precedent*) inſcrire dans le cercle A, vn polygone regulier plus grand que le quarré G ; ſuppoſez qu'il eſt décrit, & qu'on en décrit vn ſemblable dans le cercle B.

Demonſtration. Les polygones ſemblables dans A & B, ont vne meſme raiſon (*par la* 1.) que le quarré de CD, à celuy de EF : or l'on ſuppoſe que la raiſon de G, eſt la meſme que du quarré de CD, au quarré de EF ; doncques il y a vne meſme raiſon du polygone tracé dans A, au polygone tracé dans B, que de la quantité G, au cercle B : or le polygone dans A eſt plus grand que la quantité G ; doncques le polygone décrit dans B, ſeroit plus grand que le cercle B : & la partie ſurpaſſeroit le tout ; enſuite la grandeur G plus petite que le cercle A ne peuſt auoir vne meſme raiſon comparée au cercle B, qu'a le quarré du diametre CD, au quarré du diamette EF ; j'en puis dire autant du cercle B, eu égard au cercle A : il faut donc que du cercle A au cercle B, il y ayt vne mé-

me raiſon que du quarré de CD, au quarré de EF.

Coroll. I. La raiſon des cercles eſt double comparée à celle de leurs diametres : parce que les quarrez eſtant figures ſemblables, (*par la 20. du 6.*) leur raiſon eſt double, comparée à celle des coſtez homologues, les cercles ont vne meſme raiſon que les quarrez ; doncques leur raiſon eſt double, eu égard à celle de leurs diametres.

Coroll. II. Les cercles ont vne meſme raiſon que les polygones ſemblables inſcrits dans le cercle.

Coroll. III. De là vous pouuez conclurre que ſi des figures ſemblables, décrites dans d'autres, s'approchẽt toûjours plus, en ſorte que pour le dire ainſi elles aillent finir en elles, ſi l'on obſerue toûjours la meſme proportion entr'elles, les figures dans leſquelles elles ſeront inſcrites, auront vne meſme raiſon, que les figures inſcrites : vous le voyez aux polygones inſcrits dans le cercle, qui s'approchent tellement du cercle, qu'ils finiſſent en luy ; cela ſe peuſt monſtrer en

pluſieurs autres figures, & cette methode me ſemble fort ſubtile.

PROPOSITION III.

Theoreme.

Toute pyramide triangulaire ſe peuſt diuiſer, non ſeulement en deux priſmes égaux ; leſquels pris enſemble ſeront plus grands que la moitié de la pyramide ; mais encore en deux pyramides égales entr'elles, & ſemblables à la grande.

La pyramide ABCD a ſa baſe BCD triangulaire : je dis premierement que l'on peuſt trouuer dans cette pyramide deux priſmes égaux EBFI, EHKF : diuiſez chaque coſté de la pyra-

mide par le milieu aux poincts E, F, G, H, I, K, & tirez les lignes EG, EF, FG, EI, FH, FK, KI, IH.

Demonſtration. Puis qu'au triangle ABD, il y a vne meſme raiſon d'AG ; à GB, que d'AF à FB, tous les coſtez ayant eſté diuiſez par le milieu, GF & HB ſeront paralleles (*par la* 2. *du* 6.) par la meſme raiſon GB, FH, FE, HI, FH, IE, &c. ſeront encore paralleles : doncques FBGH eſt vn parallelogramme ; BGEI, DHIK, DFEK le ſont auſſi, EG, & GF ſont paralleles aux lignes IB, & BH, ainſi les plans que l'on tirera ſur elles ſeront paralleles (*par la* 15. *de l'onziéme* :) c'eſt à dire, EGF & IBH ; doncques la figure EBFI eſt vn priſme. Ie monſtreray de meſme façon que EHKF eſt vn priſme ; & parce que ces deux priſmes ſont de méme hauteur, & que le parallelogramme KH, baſe de l'vn, eſt double (*par la* 41. *du* 1.) du triangle IBH qui eſt baſe de l'autre, les priſmes EBFI ; EHKF ſont égaux.

Ie dis en ſecond lieu que l'on trouue dans le meſme corps deux pyramides

égales AEFH, ECKI : car le triangle AFG eſt égal (*par la* 8. *du* 1.) au triangle FDH, & celuy cy à ſon oppoſé EIK ; les triangles AEG, EIC ; AEF, ECK ; EFG & CIK, ſont encore égaux, parce qu'ils ont tous les coſtez égaux : c'eſt à dire, la moitié des coſtez de la pyramide, donc les deux pyramides ſont égales.

Ie dis en troiſiéme lieu, qu'elles ſont ſemblables à la grande pyramide ABCD ; parce que les triangles des petites ſont ſemblables aux triangles de la grande (*par la* 2. *du* 6.)

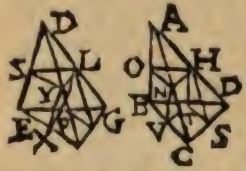
Ie dis en quatrieſme lieu, que les priſmes ſont plus grands que la moitié de la grande pyramide. Pour le voir, tirez les lignes GI, & GH, il ſe formera vne pyramide GIHB, egale à la pyramide AEFG : car les triangles EFG, & IBH ſont égaux, & puiſque les lignes AG, & FH, ſont paralleles & eſgales, les lignes GH, & AF ſeront eſgales (*par la* 33. *du* 1.) ainſi GI, & AE ſeront auſſi eſgales : les triangles AEF, GIH ; AFG, GIB ; AFG, GHB, (*par la* 8. *du* 1.) ſeront encore eſgaux ; doncques les pyramides AEFG & GIHB,

ſont eſgales : or le priſme EBFI eſt plus grand que la pyramide GIKB, ainſi il eſt plus grand que la pyramide AEFG, & le priſme EHKF qui luy eſt eſgal, ſera auſſi plus grand que la pyramide ECKI, enſuite les deux priſmes mis enſemble ſeront non ſeulement plus grands que les deux pyramides; mais encore que la moitié de la grande pyramide.

PROPOSITION IV.

Theoreme.

Si deux pyramides triangulaires de meſme hauteur ſont diuiſées chacune en deux priſmes eſgaux & en deux pyramides eſgales, & qui ſoient encore diuiſées de meſme façon: il y aura vne meſme raiſon de tous les priſmes de l'vne, à tous les priſmes de l'autre, que d'vne baſe à l'autre.



Les deux pyramides triangulaires ABCD, & DEFG ſont de meſme hauteur, & on les diuiſe ſelon la precedente en deux priſmes eſgaux, & en deux pyramides eſgales, il faut ſous-diuiſer les deux petites pyramides de la meſme façon, & ainſi conſecutiuement autant

que l'on voudra, pourueu qu'il y ayt autant de diuiſions, & enſuite autant de priſmes en l'vne qu'en l'autre, je dis que tous les priſmes de l'vne comparée à tous les priſmes de l'autre; ont vne meſme raiſon, que la baſe BCD, comparée à la baſe EFG.

Demonſtration. Les pyramides ABCD, & DEFG eſtant de meſme hauteur, & les priſmes qui ſe forment par la premiere diuiſion, ayant vne hauteur qui eſt la moitié de celle des grandes pyramides; ils auront encore vne meſme hauteur: or chaque priſme eſt la moitié d'vn parallelepipede qui auroit la meſme baſe (*par la 40. de l'onziéme*) & les parallelepipedes (*par la 32. de l'onziéme*) ont vne méme raiſon entr'eux que leurs baſes entre elles, ainſi la raiſon des priſmes entr'eux ſera la meſme que de leurs baſes entre elles, doncques le priſme BH, eſt à l'égard du priſme EL, ce qu'eſt la baſe BVT, eu égard à la baſe PXE: or chacune eſt la quatrieſme partie de la grande baſe, ainſi chaque priſme de l'vne comparé à chaque priſme, qui luy correſpond en l'autre,

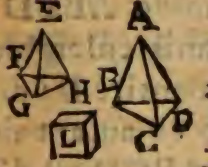
aura vne meſme raiſon que la baſe de la grande pyramide comparée à l'autre, & les autres deux priſmes eſtant eſgaux à ceux-cy, ils auront auſſi vne meſme raiſon: ceux encore qui ſe feroient dans les pyramides AHNO, DLYS, auroient vne meſme raiſon que les baſes HNO, LYS; car les baſes eſtant eſgales aux oppoſées BVT, EPX, qui ſont le quart des baſes totales, elles auroient encore vne meſme raiſon entr'elles que les grandes baſes, ainſi les priſmes qui ſe produiroient par la ſeconde diuiſion, auroient auſſi vne meſme raiſon que les baſes, & de cette façon ie monſtreray en toute diuiſion, que les priſmes auront vne meſme raiſon que les baſes; doncques tous les priſmes de l'vne comparez à tous les priſmes de l'autre auront vne meſme raiſon que la baſe DBC, comparée à la baſe EFG.

PROPO

PROPOSITION V.

Theoreme.

Les Pyramides triangulaires de meſme hauteur, ont vne meſme raiſon que leurs baſes.



Ie ſuppoſe que les pyramides ABCD, & EFGH; ayent vne meſme hauteur; je dis qu'elles auront vne meſme raiſon que leur baſes BCD, & FGH,

Demonſtration. ſi cela n'eſtoit pas, ſuppoſons que la pyramide ABCD, ayt vne plus grande raiſon comparée à la pyramide FHG, que la baſe BCD, comparée à la baſe FHG; donques il y auroit quelque quantité L plus petite que la pyramide ABCD, laquelle auroit vne meſme raiſon, comparée à la pyramide, EFGH, que la baſe BCD, comparée à la baſe FHG; diuiſez la pyramide ABCD

en deux priſmes eſgaux,& en deux pyramides eſgales; diuiſez encore chaque pyramide en deux priſmes, & pourſuiuez les meſmes diuiſions, puiſque les deux premiers priſmes ſont plus grands que la moitié de la pyramide ABCD, & que par la diuiſion des deux petites pyramides, les priſmes ſont toûjours plus grands que la moitié, ce qui reſtera ſera plus petit que la difference qu'il y a entre la quantité L & la pyramide ABCD; c'eſt pourquoy les priſmes mis enſemble ſeront plus grands que la quantité L: diuiſez la pyramide EFGH, en autant de priſmes, que la pyramide ABCD eſt diuiſée.

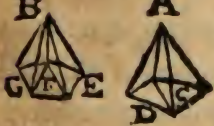
Demonſtration. Les priſmes de la pyramide ABCD, comparez aux priſmes de EFGH ont vne meſme raiſon que la baſe BCD, comparée à la baſe FGH; or ce qu'eſt BCD à l'égard de FGH, la quantité L l'eſt comparée à la pyramide EFGH; doncques les priſmes de ABCD, comparez,aux priſmes de EFGH; auront la méme raiſon que la quantité L,comparée à la pyramide EFGH:or les priſmes de

ABCD ſont plus grands que la quantité L ; enſuite (*par la* 14. *du* 5.) les priſmes inſcrits dans la pyramide EFGH ſeroient plus grands que la pyramide EFGH, ce qui eſt abſurde : ainſi aucune plus petite quantité que la pyramide ABCD, ne peuſt auoir vne meſme raiſon à la pyramide EFGH que la baſe à la baſe : enſuite les pyramides de meſme hauteur, ont vne meſme raiſon que leur baſes.

PROPOSITION VI.

Theoreme.

Toute ſorte de pyramides de meſme hauteur ont entr'elles vne meſme raiſon que leurs baſes.



Les pyramides ACD, & BEFG, ſont de meſme hauteur : je dis que la premiere à l'égard de la ſeconde a vne méme raiſõ, que la baſe CD à l'égard de la baſe EFG. Pour le

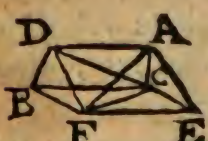
voir, diuiſez les baſes en triangles, & vous formerez des pyramides triangulaires.

Demonſtration. Les pyramides BE, & AC de méme hauteur,& triangulaires, ont vne meſme raiſon qu'ont les baſes E & C; de meſme les baſes BF & D, ont vne meſme raiſon que AF, & AD, doncques (*par compoſition de la 24. du 5.*) toute la pyramide BFE, comparée à toute la pyramide ADC aura vne meſme raiſon que EF, comparée à DC; & parce que la pyramide BG, à l'égard de AC, a vne meſme raiſon que la baſe G, comparée à la baſe C: il y aura auſſi (*par la 24. du 5.*) vne meſme raiſon de la pyramide BEFG, à la pyramide ACD, que de la baſe GFE, à la baſe CD.

PROPOSITION VII.

Theoreme.

Toute Pyramide eſt la troiſieſme partie d'vn priſme, qui a meſme baſe, & meſme hauteur.



Que l'on ſe propoſe le priſme triangulaire AB, & la pyramide CAEF, qui ayt meſme baſe ACE que luy, & que la hauteur ſoit FE : je dis que la pyramide CAEF, eſt la troiſieſme partie du priſme. Pour le voir, tirez les lignes DC, AF, FC, qui diuiſent les parallelogrammes par le milieu.

Demonſtration. Le priſme eſt diuiſé en trois pyramides ACFE, CFBD, & DACF ; que je dis eſtre égales : car premierement les pyramides ACFE, & ACFD, ayant les baſes AFE, & ADF égales (*par la* 34. *du* 1.) & ayant meſme

hauteur, puis qu'elles ont le meſme ſommet C, ſont égales; les pyramides BDFC, & ADFC ayant les baſes ADC, & BDC égales, & ayant la meſme hauteur, puis qu'elles ont le meſme ſommet F, ſont auſſi égales (*par la* 5.) ainſi chaque pyramide eſt la troiſieſme partie du priſme: or prenant pour baſe le triangle ACE, & pour hauteur la diſtance qu'il y a entre les triangles ACE, & DEF, la pyramide AFCE, ayant vne meſme baſe ACE que le priſme & vne meſme hauteur, eſt la troiſieſme partie du priſme.

Que ſi le priſme eſtoit polygone, il le faudroit diuiſer en priſmes triangulaires, & la baſe auſſi le diuiſeroit en pyramides triangulaires, chacune deſquelles ſeroit la troiſieſme partie du priſme qui luy répond; doncques toute la pyramide (*par la* 12. *du* 5.) ſeroit la troiſiéme partie du priſme.

PROPOSITION VIII.

Theoreme.

La raiſon des Pyramides ſemblables comparée à celle des coſtez homologues eſt triple.

Que l'on ſe propoſe premieremẽt deux pyramides triangulaires ABCD, & EFGH, je dis que leur raiſon eſt triple, comparée à celle du coſté AC au coſté homologue EH. Pour le voir, étendez les plans triangulaires ABC, BDC, ACD; EFH, EGH, & FGH: en ſorte que l'on acheue 6 parallelogrammes CM, CL, CI, CO, HN, HK, & ayant tiré les lignes ML; NO, acheuez les priſmes MCLB OHNF, acheuez auſſi les parallelepipedes RC, PH.

Demonſtration. Puiſque les pyramides ſont ſemblables, tous les triangles qui les compoſent ſeront ſemblables (*par la*

definition 9. de l'onziéme) & il y aura vne meſme raiſon d'AC, à CB que d'EH, à FH ; & l'angle ACB, ſera égal à l'angle EHF : ainſi non ſeulement les parallelogrammes MC, & HO ; mais encore les autres parallelogrammes LC, NH ; CI, HK, & leurs oppoſez ſeront ſemblables, (*par la* 24. *de l'onziéme*,) les parallelepipedes ſeront auſſi ſemblables (*par la defin. 9. de l'*11.) & (*par la* 33. *de l'*11.), leur raiſon ſera triple, comparée à celle des coſtez AC, & EH : or leur moitié, c'eſt à dire les priſmes auront meſme raiſon que les pyramides qui ſont leur troiſiémes parties auront vne raiſon triple, comparée à celle des coſtez homologues AC, EH.

Que ſi les pyramides n'eſtoient pas triangulaires; mais polygones, diuiſez-les en polygones; puiſque la raiſon de chacune des triangulaires à ſa correſpondante eſt triple, comparée à celle des coſtez homologues ; les pyramides totales auront auſſi la meſme raiſon (*par la* 12. *du* 5.)

PROPOSITION IX.

Theoreme.

Les pyramides égales, ont leurs baſes, & leurs hauteurs reciproques; & celles qui ont leurs hauteurs & baſes reciproques, ſont égales.

Que l'on ſe propoſe premierement les pyramides triãgulaires ABCD, EFGH qui ſoient égales : je dis que la raiſon de la baſe BCD, a la baſe GFH, eſt la meſme que de la hauteur de la pyramide EFGH, a la hauteur de la pyramide ABCD. Pour le voir, acheuez les parallelepipedes, comme j'ay déja dit.

Demonſtration. Les baſes des parallelepipedes ſont doubles de celles des pyramides (*par la* 34. *du* 1.) & les hauteurs ſon les meſmes : or les parallelepipedes ſont égaux, comme eſtant 6. fois

plus grands que les pyramides. Les parallelepipedes eſtant égaux, ils ont leurs baſes, & leurs hauteurs reciproques, donques auſſi les baſes & les hauteurs des pyramides ſeront reciproques.

Secondement ſi les baſes, & les hauteurs des pyramides ſont reciproques: je dis qu'elles ſont égales; car les baſes des parallelepipedes, eſtant doubles de celles des pyramides, elles auront vne meſme raiſon que les moitiés; enſuite les baſes, & les hauteurs ſeront reciproques, & (*par la 34. de l'onzième,*) les parallelepipedes ſeront égaux, & les baſes qui ſont leur moitié ſeront reciproques.

Si les pyramides égales ont les baſes polygones, que l'on change ce polygone en triangle, ce qui eſt facile, le changeant premierement en parallelogramme, puis faiſant vn triangle égal au parallelogramme: faites à la meſme hauteur vne pyramide ſur ce triangle, elle ſera égale à la polygone (*par la 6.*) or les pyramides triãgulaires, ont les baſes, & les hauteurs reciproques; doncques les pyramides polygones, ont les hauteurs, & les baſes reciproques.

LEMME.

Si l'on propose vne quantité moindre qu'vn cylindre, l'on pourra inscrire dans le cylindre vn prisme plus grand que cette quantité.

Que l'on se propose la quantité A plus petite que le cylindre, dont la base est le cercle CDEF; ie dis que dans ce cylindre l'on pourra inscrire vn prisme regulier plus grand que la quantité A : Pour le faire, ayant inscrit dans le cercle qui est la base du cylindre le quarré CDEE: il faut décrire vn quarré autour du cercle, & tracer encore vn octogone, puis ayant alongé les costez FG, & ED, du quarré inscrit, tirez par le poinct L, la tangente PQ, sur tous ces polygones il faut s'imaginer des prismes de mesme hauteur que le cylindre.

Demonst. Les prismes de mesme hau-

teur , ont entre eux meſme raiſon que les baſes (par la 40. de l'11.) *or le quarré inſcrit eſt la moitié du circonſcrit ; le circonſcrit eſt plus grand que le cercle , & ſon priſme plus grand que le cylindre , doncques le priſme du quarré inſcrit , eſt plus de la moitié du cylindre ayant fait vn octogone, le priſme qui eſt ſur l'octogone emporte plus de la moitié du reſte : car le triangle DLC , eſt la moitié du rectangle CQ , qui eſt plus grand que le ſegment CLD, ainſi le priſme décrit deſſus le triangle CLD emporte plus de la moitié du ſegment du cylindre , décrit ſur le ſegment CLD : il en eſt de meſme des autres ſegments ; ſi ie faits des polygones de 16. 32. 64. coſtez , ie monſtreray qu'ayant fait des priſmes l'on oſte du reſte du cylindre plus de la moitié : ainſi puiſque le priſme du quarré inſcrit, oſte plus de la moitié du cylindre , & qu'en inſcriuant vn priſme ſur l'octogone l'on emporte plus de la moitié du reſte, & ainſi conſequemment , on laiſſera enfin vne quantité plus petite , que celle par laquelle le cylindre ſurpaſſe la quantité A , & pour lors le priſme in-*

ſcrit

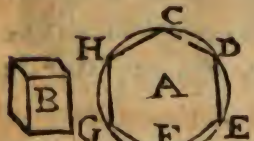
ſcrit, ſera plus grand que la quantité A.

Ie prouueray la meſme choſe des pyramides inſcrites dans vn cone.

PROPOSITION X.

Theoreme.

Tout cone eſt la troiſiéme partie d'vn cylindre de meſme hauteur.



Que l'on s'imagine ſur le cercle A, vn cone, & vn cylindre de meſme hauteur : je dis que le cylindre eſt triple du cone.

Demonſtration. Si cela n'eſtoit pas, ſuppoſons que la raiſon du cylindre au cone ſoit plus que triple, & que la quantité B, ayt vne raiſon triple au cone, enſuite elle ſeroit plus petite que le cylindre, l'on pourroit doncques (*par le lemme precedent*) inſcrire vn priſme dans le cylindre, qui ſeroit plus grand que la

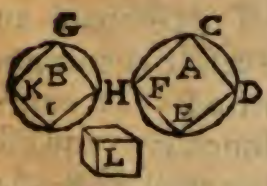
quantité B : ſuppoſons que la baſe de ce priſme, ſoit le polygone CDEFGH ſur lequel faites vne pyramide dans le cone, qui ſoit de meſme hauteur que le cylindre, le priſme, & le cone. Le priſme ſera triple de la pyramide : or la quantité B, eſt auſſi triple du cone, doncques il y auroit vne meſme raiſon du priſme à la pyramide, que de la quantité B au cone, & d'ailleurs, le priſme ſeroit plus grand que la quantité B, ainſi (*par la* 14. *du* 5.) la pyramide inſcrite dans le cone ſeroit plus grande que le cone, c'eſt à dire, que la partie ſeroit plus grande que le tout.

Si l'on diſoit que le cone a vne raiſon plus que ſous-triple ; l'on feroit le meſme argument, & l'on prouueroit le méme de la meſme façon.

PROPOSITION XI.

Theoreme.

Les cones, & cylindres de meſme hauteur, ont vne meſme raiſon, que leur baſes.



Que l'on s'imagine deux cylindres, ou deux cones de meſme hauteur, ſur les cercles A & B. Ie dis qu'ils ont vne meſme raiſon que leur baſe A & B. Si cela n'eſtoit pas ainſi, ſuppoſons qu'il y ayt vne plus grande raiſon du cylindre B, que de la baſe A, à la baſe B, & que la quantité L ayt vne méme raiſon au cylindre B, que la baſe A, à la baſe B : L ſeroit doncques plus petite que le cylindre (*par la 9. du 5.*) & (*par le lemme precedent*) l'on pourroit inſcrire dans le cylindre A, vn priſme plus grand, que la quantité L. Sup-

poſons que la baſe de ce priſme ſoit CDEF, inſcriuez dans le cercle B, vn ſemblable polygone GHIK, & vn priſme deſſus. Il y auroit vne meſme raiſon du priſme A, au priſme B, que du polygone CDEF, au polygone GHIK (*par la* 40.) or les polygones ſemblables, ont vne meſme raiſon, que les cercles (*par le cor. de la* 2.) doncques le priſme A comparé au priſme, B, auroit vne méme raiſon que le cercle A, comparé au cercle B, or ce qu'eſt le cercle A comparé au cercle B, la quantité L, l'eſt comparée au cylindre B, doncques cequ'eſt le priſme A, comparé au priſme B, la quantité L, l'eſt comparée au cylindre *B*, deplus le priſme A eſt plus grand que la quantité L; ainſi le priſme A, ſeroit plus grand que le cylindre B, dans lequel il eſt inſcrit: c'eſt à dire que la partie ſeroit plus grande que le tout, doncques le cylindre A n'a pas vne plus grande raiſon comparé au cylindre B, que le cercle A comparé au cercle B. Puiſque les cones ſont la troiſiéme partie des cylindres de meſme hauteur, ils au-

ront auſſi vne meſme raiſon que les baſes.

PROPOSITION XII.

Theoreme.

La raiſon des cylindres & des cones ſemblables, eſt triple comparée à celle du diametre de leurs baſes.

Que l'on ſe repreſente deux cones ſemblables, qui ayent pour baſes les cercles A & B; ie dis que le cone A comparé au cone B, a vne raiſon triple comparée à celle de CD à EF. Si cela n'eſtoit pas de la ſorte, ſuppoſons qu'il y ayt vne plus grande raiſon du cone A, au cone B, que triple comparée à cell e du diametre CD, au diametre FE. Il y auroit enſuite quelque quantité par exem-

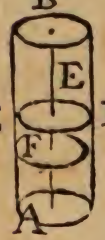
ple G plus petite que le cone A, laquelle comparée au cone B auroit vne raiſon triple eu égard à celle du diametre CD, au diametre FE, & (*par le lemme precedent*) l'on pourroit inſcrire dans le cone A, vne pyramide plus grande que la quantité G, ie veux que ce ſoit la pyramide qui a pour baſe le polygone CHDI, & que l'on inſcriue dans le cercle B, vn ſemblable polygone ELFK', ſur lequel on faſſe vne pyramide inſcrite dans le cone B.

Demonſtration. Du coſté, CH au coſté FK, la raiſon eſt la meſme que du diametre CD au diametre EF. Or les pyramides ſont ſemblables parce que elles ont des baſes ſemblables, il y a vne meſme raiſon du coſté CH de l'vne à ſa propre hauteur que du coſté FK de l'autre à ſa hauteur, puiſque l'vne & l'autre ont la hauteur des cones, ainſi eſtant ſemblables elles ont vne raiſon triple comparée à celle du coſté CH, au coſté FK, qui eſt la meſme que celle des diametres. Doncques la pyramide A eu égard à la pyramide B, a vne meſme

raiſon que la quantité G au cone B, or la pyramide A eſt plus grande que la quantité G, doncques la pyramide B (*par la* 14. *du* 5.) ſeroit plus grande que le cone, dans lequel elle eſt inſcrite, ce qui eſt impoſſible, en ſuite la raiſon du cone A au cone B n'eſt pas plus grande que triple comparée à celle de CD à EF: ny auſſi le cone B au cone A n'a pas raiſon plus grande que triple comparée à celle de EF à CD: ainſi les cylindres eſtant triples des cones, ſeront en raiſon triple des diametres.

PROPOSITION XIII.

Si l'on couppe vn cylindre, par vn plan parallele aux baſes : les ſegments du cylindre, auront vne meſme raiſon, que les ſegments de l'axe.



Diuiſez le cylindre AB auec le plan CD, parallele aux baſes A, & B, je dis que AE ſegment du cylindre, a vne meſme raiſon au ſegment EB, que la ligne AE, à la ligne EB. Pour le voir, ſupposés que la ligne EF, ſoit vne partie aliquote de la ligne AE, & tirez par F vn autre plan parallele aux baſes.

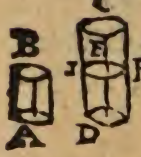
Demonſtration. Puiſque FE eſt vne partie aliquote d'AE, par exemple ſuppoſons qu'elle ſe trouue 4. fois en AE, l'on pourroit en diuiſant AE faire autant de cylindres de meſme hauteur ti-

rant des baſes paralleles, & autant de fois que EF, ſe trouuera en EB, on pourra faire des cylindres de méme hauteur, leſquels (*par l'onzieme*) ſeront eſgaux, & enſuite ils ſeront des parties aliquotes du cylindre ADC, ſemblables aux ſegments de la ligne BE, parties aliquotes de la ligne AE, puis donc qu'il y a dans le cylindre BE, autant de parties aliquotes du cylindre AE, qu'il y en a en la ligne BE, de la ligne AE, de quelque ſorte que ſoient les parties aliquotes (*par la def. 5. du 5.*) la raiſon de la ligne AE, à la ligne BE ſera la méme que du cylindre AE, au cylindre BE.

PROPOSITION XIV.

Theoreme.

Les cylindres, & les cones, qui ont les baſes eſgales, ont vne meſme raiſon que les hauteurs.



Que l'on faſſe deux cylindres droicts AB, & CD. dont les baſes ſoient égales ; je dis que le cylindre A B, comparé au cylindre CD ; a vne méme raiſon que la hauteur AB, comparée à la hauteur CD. Pour le voir, couppez de la plus grande hauteur DC, vne quantité DE, eſgale à la hauteur AB ; & par E, tirez vn plan IF parallele aux baſes.

Demonſtration. Les cylindres AB, & DE, ſont égaux (*par la* 11.) or la raiſon du cylindre DE, au cylindre EC,

eſt la méme, que de la ligne DE, à la ligne EC, (car dans les cylindres les axes eſtant perpendiculaires ils meſurent les hauteurs) doncques il y a vne meſme raiſon du cylindre AB, au cylindre DC, que de la hauteur AB, à la hauteur CD.

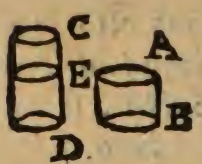
Si les cylindres ne ſont pas droicts comme HI, tirez du poinct H vne perpendiculaire HM au plan de la baſe KL, ce ſera la hauteur du cylindre : tirez enſuite la ligne IM. Parce que le plan de triangle HIM, coupe les deux plans NO, LK, qui ſont paralleles, (*par la 16. de l'onziéme*) les ſections NO, & IM, ſeront paralleles, ainſi (*par la 2. du 6.*) il y aura vne meſme raiſon de HO, à OI, qui ſont les ſegment de l'axe, que de HN, à NM, ſegments de la hauteur, l'on peut donc prendre les axes pour la hauteur.

Et parce que les cones ſont les troiſieſmes parties des cylindres (*par la 10.*) ils auront vne meſme raiſon que les

cylindres, doncques les cones qui ont les baſes égales ont vne méme raiſon que les hauteurs.

PROPOSITION XV.

Les cylindres, & les cones eſgaux ont leurs hauteurs & leurs baſes, reciproques ; & ceux qui ont les baſes, & les hauteurs reciproques, ſont égaux.



Suppoſons qu'il y ayt deux cylindres éſgaux AB, & CD ; je dis qu'il y a vne meſme raiſon de la baſe B, à la baſe D, que de la hauteur CD, à la hauteur AB : couppez la quantité DE égale à la hauteur AB.

Demonſtration. Puiſque les cylindres AB, & DE, ont vne meſme hauteur, ils auront vne meſme raiſon que leur baſe (*par l'onziéme*) ainſi il y a vne

méme

meſme raiſon d'AB, à, DE, que de la baſe B, à la Baſe D, & puis que AB, & CD, ſont égaux, il y aura vne meſme raiſon du cylindre CD, à ED, que de la baſe B à la baſe D, or ce qu'eſt le cylindre CD, comparé au cylindre DE; la hauteur CD, l'eſt comparée à la hauteur DE, où à AB, doncques il y a vne meſme raiſon de la baſe B, à la baſe D, que de la hauteur CD, à la hauteur AB.

Ie dis en ſecond lieu que s'il y a vne meſme raiſon de la baſe B, à la baſe D; que de la hauteur CD, à la hauteur AB; les cylindres ſont égaux.

Demonſtration. Il y vne méme raiſon du cylindre AB, au cylindre DE, que de la baſe B, à la baſe D, (*par l'onziéme*) or ce qu'eſt la baſe B comparée à la baſe D, la hauteur CD l'eſt comparée à la hauteur AB, ou DE, & ce qu'eſt la hauteur CD, comparée à la hauteur DE, le cylindre DC, l'eſt comparé, au cylindre DE, (*par la* 14.) ainſi il y a vne méme raiſon du cylindre CD, au cylindre DE; que du cylindre AB, au méme

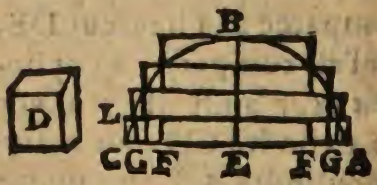
cylindre DE ; doncques les cylindres AB, & CD, ſont égaux (*par la 9. du 5.* Il faut dire le meſme des cones, parce qu'ils ſont la troiſiéme partie des cylindres.

Qu'on laiſſe la propoſition XVI. & XVII.

Les propoſitions 16. & 17. n'eſtant que pour la 18. que nous pouuons prouuer plus facilement auec le P. Taquet, en leur place nous ſubſtituons deux lemmes.

LEMME I.

Si l'on propoſe vne quantité moindre que la ſphere ; l'on pourra inſcrire dans la ſphere, tant de cylindres, que touts pris enſemble, ſeront plus grands que le cercle.



Le demi-cercle ABC, eſt le grand demi-cercle d'vne ſphere, &

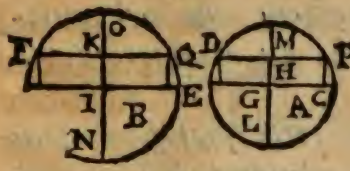
la quantité D, eſt plus petite que la ſphere : je dis qu'on pourra tant inſcrire de cylindres dans la ſphere que touts pris enſemble ſeront plus grands que la quantité D. Pour le conceuoir, diuisés le ſemidiametre EB en autant de parties égales que vous voudrez, par ces diuiſions tirés des paralleles à la ligne AC, & faites des parallelogrammes inſcrits, & alongeant les coſtez, deſcriuez les parallelogrammes circonſcripts, en ſorte que leur nombre ſurpaſſe d'vne vnité les parallelogrammes inſcrits, ainſi que la figure le monſtre.

Demonſtration. Les parallelogrammes circonſcripts ſurpaſſent les inſcrits, par les parallelogrammes par où paſſe le cercle, en ſorte que l'excés des circonſcrits par deſſus les inſcrits, eſt égal au parallelogramme AL. Imaginez-vous que l'on fait rouler toute la figure, autour de la ligne BE, qui ſerue d'axe, chaſque parallelogrammes deſcrira vn cylindre, le demi-cercle deſcrira la ſphere, & l'excez des cylindres inſcrits par deſſus les circonſcrits, ſera égal au cylindre

deſcrit par le parallelogramme AL. Or la ſphere ſurpaſſe moins, les cylindres inſcrits ; que les circonſcrits ne les ſurpaſſent, puiſque la ſphere eſt contenuë dans les cylindres circonſcrits. Doncques l'excés de la ſphere par deſſus les cylindres circonſcrits, eſt moindre que le cylindre deſcrit par le parallelogramme AL. Que ſi l'on diuiſe EB en plus de parties, le parallelogramme AL deuiendra plus petit, puiſque ſa hauteur ſera moindre: l'on peuſt donc prendre AL ſi petite, que l'excés de la ſphere par deſſus la quantité D, ſera plus grand que le cylindre AL ainſi l'on peuſt tellement ſoubs-diuiſer le diametre D, que les cylindres inſcrits ſoient plus grands que la moitié de la quantité D, & en faiſant le meſme en l'autre hemiſphere les cylindres inſcrits ſeront plus grands que la quantité D.

LEMME II.

La raiſon des cylindres ſemblables, inſcrits dans deux ſpheres, eſt triple comparée à celle des diametres.



Dans les deux ſpheres A & B, les deux cylindres inſcrits ſont ſemblables formés par des circulations des parallelogrammes ſemblables CD, & EF, les diametres ML, & NO demeurant immobiles : ie dis que le cylindre du rectangle CD, à l'égard du cylindre du rectangle EF, a vne raiſon qui eſt triple, comparée à celle du diametre LM, au diametre NO.

Demonſtration. Les rectangles CD, & EF, eſtant ſemblables, il y aura vne méme raiſon (par la definition 5.) *de PD, à PC, ou à HG qui luy eſt égale, que de QF, à KI : où imaginez vous que l'on tire les lignes PG, & QI, qui manquent*

dans la figure, les triangles PHG, *&* QKI, *ſeront ſemblables* (par la 6. du 6.) *& proportionnaux ; c'eſt à dire, il y aura vne meſme raiſon de* PH *à* QK *que de* PG, *à* IQ : *or les cylindres ſemblables, ont vne raiſon triple, comparée à celle du diametre de leur baſe, ou de leur demidiametre, doncques les cylindres inſcrits dans la ſphere, ont vne raiſon triple, comparée à celle du diametre de la ſphere.*

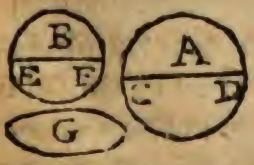
Mais pour faire cette propoſition plus vniuerſelle, ſi les cylindres n'eſtoient pas poſez ſur les diametres, comme ceux de cette figure, pourueu que le diametre de leur baſe HP KQ *ayant vne meſme raiſon, auec les diametres* LM, *&* NO, *ce qui arriuera touſiours, quand les diuiſions des diametres* LM, *&* NO *ſeront ſemblables ; enſorte qu'ayant diuiſé les deux diametres de meſme façon, en l'vn & l'autre cercle, ſi l'on forme autant de cylindres ſemblables en l'vne qu'en l'autre ; tous ceux qui ſeront décrits dans l'vne comparés à tous ceux qui ſeront décrits dans l'autre, auront vne raiſon triple*

comparée à celle des diametres de leur base.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

La raiſon des Spheres entr'elles eſt triple, comparée à celle de leurs diametres.



Les Spheres A & B, ont leur diametre CD & EF: je dis que la ſphere A, comparée à la ſphere B, a vne raiſon triple, ſi on la compare à celle de CD, à EF.

Demonſtration. Si cela n'eſtoit pas, ſuppoſons que la ſphere A, ayt à la ſphere B vne raiſon plus que triple, comparée à celle de CD, à EF: doncques il y a quelque quantité moindre que la ſphere A, qui aura à la ſphere E, vne raiſon triple

eu égard à celle de CD, à EF ; je veux que ce ſoit la quãtité G, puiſque la quantité G eſt moindre que la ſphere A, l'on pourra (*par le premier lemme*) en ſoubdiuiſant le diametre de la ſphere A, inſcrire des cylindres ; en ſorte que tous pris enſemble ſeront plus grands que la quantité G : imaginez-vous que l'on ayt diuiſé de meſme façon le diametre de la ſphere B, & que l'on ayt inſcrit autant de cylindres ſemblables. La raiſon des cylindres de la ſphere A, aux cylindres de la ſphere B, ſera triple, eu égard à celle des diametres, (*par le lemme ſecond.*) Or la quantité G, comparée à la ſphere B, auoit auſſi vne raiſon triple, ainſi la quantité G, aura vne meſme raiſon, comparée à la ſphere B ; que les cylindres de A, comparés aux cylindres de B ; & comme la quantité G, eſt plus petite que les cylindres de A, la ſphere B, ſera plus petite que les cylindres inſcrits dans B, ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc aucune quantité plus petite que la ſphere A, qui ayt à la ſphere B, vne raiſon triple comparée à celle des diametres, &

la ſphere A n'a pas vne raiſon moindre que triple comparée à celle des diametres, parce que la ſphere B auroit vne plus grande raiſon que triple, eu égard à celle qu'ont les diametres à la ſphere B ; & on luy appliqueroit la meſme demonſtration.

COROLLAIRE.

Les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes, de leurs diametres : Parceque les cubes eſtant des parallelepipedes ſemblables, comparés à leurs coſtez, ils auront vne raiſon triple (*par la 33. de l'onziéme,*) or les ſpheres entr'elles ont vne meſme raiſon (*par celle-cy*) doncques elles ont vne meſme raiſon que les cubes de leurs diametres.

FIN.